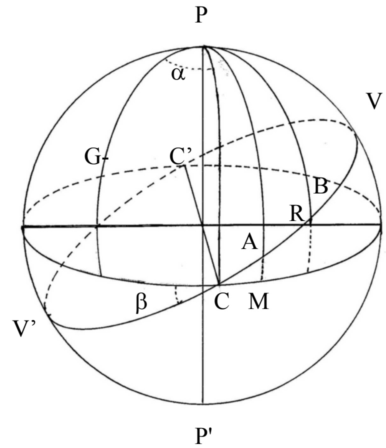
DERROTA ORTODRÓMICA
By Francesc Bou Fort

Definición: Derrota ortodrómica entre dos puntos de una esfera A y B, es la que se efectúa por el menor arco de círculo máximo que pasa por estos dos puntos



Propiedades: Es la distancia más corta entre dos puntos de una esfera
Útil para navegar grandes distancias
Está determinada por dos constantes
α: longitud del punto C de corte con el ecuador
hay dos puntos de corte del círculo máximo con el ecuador C y C’ separados 180º
β: ángulo de inclinación del plano del círculo máximo respecto del plano del ecuador
El ángulo de inclinación en C y C' es el mismo

Los puntos V y V' se llaman vértices de la derrota
C y C' se llaman nodos de la derrota

Ecuación de la ortodrómica: Sea A el punto de partida, de coordenadas l, L
Sea B el punto de llegada, de coordenadas l', L'
El meridiano que pasa por A forma con la derrota y el ecuador un triángulo esférico AMC, rectángulo en M, en el que se cumple:

$$\tan l = \sin (L - \alpha) \tan \beta \quad \mathbf{(1)}$$

que nos relaciona α (longitud del punto de corte de la ortodrómica con el ecuador) con β (inclinación del plano que contiene la ortodrómica con el ecuador) y se llama ecuación de la ortodrómica

Casos particulares: Si $L = \alpha \Rightarrow \tan l = 0$ y $l = 0$ (estamos en el punto C)
Si $L = \alpha + 90º \Rightarrow \tan l = \tan \beta$ y $l = \beta$ (estamos en el punto V)
Si $L = \alpha + 180º \Rightarrow \tan l = 0$ y $l = 0$ (estamos en el punto C')
Si $L = \alpha + 270º \Rightarrow L = \alpha - 90º$ y $\tan l = - \tan \beta$ y $l = -\beta$ (estamos en el punto V')

NOTAS: La latitud de un punto cualquiera de la ortodrómica sólo puede variar entre las latitudes de sus vértices $-\beta < l < \beta$
La longitud puede tomar cualquier valor, excepto si el círculo máximo es un meridiano, en que sólo puede tomar los valores de las longitudes de los puntos de corte con el ecuador

Situación de los vértices: vértice V; $l = \beta$; $L = \alpha + 90º$
vértice V'; $l = \beta$; $L = \alpha - 90º$ (o $L = 90º - \alpha$)

Cálculo de las constantes:

α Aplicando la ecuación de la ortodrómica a los puntos A y B tenemos:

$$\tan l = \sin (L - \alpha) \tan \beta$$
$$\tan l' = \sin (L' - \alpha) \tan \beta$$

Dividiendo ordenadamente: $\dfrac{\tan l'}{\tan l} = \dfrac{\sin(L' - \alpha) \tan \beta}{\sin(L - \alpha) \tan \beta}$

Y aplicando una conocida propiedad de las proporciones: $\dfrac{\tan l' + \tan l}{\tan l' - \tan l} = \dfrac{\sin (L' - \alpha) + \sin (L - \alpha)}{\sin (L' - \alpha) - \sin (L - \alpha)}$

Pero como por definición: $\dfrac{\tan l' + \tan l}{\tan l' - \tan l} = \dfrac{\dfrac{\sin l'}{\cos l'} + \dfrac{\sin l}{\cos l}}{\dfrac{\sin l'}{\cos l'} - \dfrac{\sin l}{\cos l}} = \dfrac{\sin (l' + l)}{\sin (l' - l)}$

Igualmente, para el segundo miembro de la igualdad anterior:

$$\frac{\sin (L' - \alpha) + \sin (L - \alpha)}{\sin (L' - \alpha) - \sin (L - \alpha)} = \frac{2 \sin 1/2\, (L' - \alpha) + (L - \alpha) \cos 1/2\, (L' - \alpha) - (L - \alpha)}{2 \cos 1/2\, (L' - \alpha) + (L - \alpha) \sin 1/2\, (L' - \alpha) - (L - \alpha)} =$$

$$= \tan ½ (L' - \alpha) + (L - \alpha) \text{ cotan } ½ (L' - \alpha) + (L - \alpha) = \tan ½ (L' + L - 2\alpha) \text{ cotan } ½ (L' - L)$$

Y sustituyendo tenemos que:

$$\tan ½ (L' + L - 2\alpha) \text{ cotan } ½ (L' - L) = \sin l' + l) / \sin (l' - l)$$

Despejando el primer término del primer miembro, podemos obtener α:

$$\tan 1/2\, (L' + L - 2\alpha) = \frac{\sin (l' + l)}{\sin (l' - l)} \tan 1/2\, (L' - L)$$

β Conocida α podemos encontrar β por la ecuación de la ortodrómica **(1)**

$$\tan \beta = \tan l \text{ cosec } (L - \alpha)$$

Rumbo inicial: En el triángulo esférico PAB, el rumbo inicial es R (ángulo que forma la ortodrómica con el meridiano que pasa por A) Sabemos la latitud de A, la de B y la diferencia de longitud entre A y B, es decir: 2 lados y el ángulo comprendido y queremos hallar el ángulo adyacente. Así que hay que aplicar la fórmula de la cotangente:

$$\text{cotan } a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \text{ cotan } A$$

que sustituyendo da: $\tan l' \cos l = \sin l \cos \Delta L + \sin \Delta L \text{ cotan } R$

y despejando: $$\text{cotan } R = \frac{\tan l' \cos l - \sin l \cos \Delta L}{\sin \Delta L} = \cos l \left(\frac{\tan l'}{\sin \Delta L} - \frac{\tan l}{\tan \Delta L} \right)$$

Rumbo final o de recalada: Es el último rumbo con que se llegaría al punto de recalada o situación final

Cálculo: - Se calcula como rumbo inicial como si B fuese el punto de partida y A el de llegada

= Aplicando el teorema de los senos al triángulo esférico APB conocidos l y l' tendremos que: $\frac{\cos l'}{\sin R_i} = \frac{\cos l}{\sin R_f}$

Distancias ortodrómicas: En el triángulo esférico PAB, hay que hallar el lado D, conocidos los otros lados y el ángulo opuesto. Aplicando la fórmula del coseno;

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

sustituyendo, tenemos:

$$\cos D = \sin l \sin l' + \cos l \cos l' \cos \Delta L$$

NOTAS: * Si l y l' son de igual signo => $\sin l \sin l' > 0$ y si l y l' son de distinto signo => $\sin l \sin l' < 0$
* Si $\Delta L < 90º$ => $\cos l \cos l' \cos \Delta L > 0$ y si $\Delta L > 90º$ => $\cos l \cos l' \cos \Delta L < 0$
* Si $\cos D > 0$ => $D < 90º$ y si $\cos D < 0$ => $D > 90º$
* D se obtiene en º y hay que pasarlo a ' (multiplicando por 60) para saber la distancia en millas

Otras aplicaciones: Cálculo de las constates en función de las coordenadas de un punto y del rumbo inicial

En el triángulo esférico rectángulo AMC,

$$\cos \beta = \cos l \sin R_i$$

Y por la ecuación de la ortodrómica, conocida β: $\sin (L - \alpha) = \tan l \text{ cotan } \beta$

O por el teorema de las cotamgentes: $\tan (L - \alpha) = \sin l \tan R_i$

Cálculo de las coordenadas de los vértices en función de las coordenadas de un punto y del rumbo inicial

En el triángulo esférico rectángulo PVA,

Por el teorema de los senos: $\cos l_v = \cos l \sin R_r$

Por el teorema de las cotangentes $\text{cotan } \Delta L_v = \sin l \tan R_i$

Navegación ortodrómica:

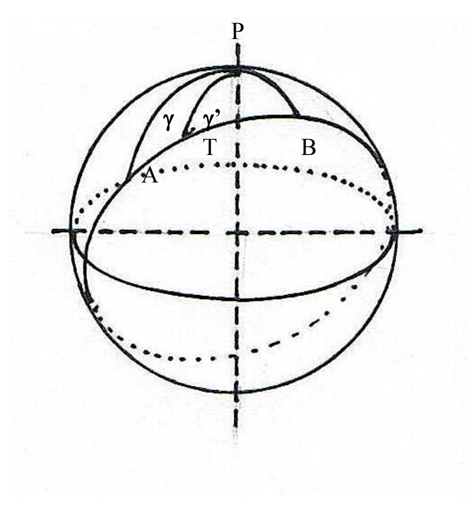
La derrota no corta a los meridianos con el mismo ángulo; hay que ir cambiando de rumbo constantemente. Esto no es posible realizarlo prácticamente.

Este problema se puede resolver navegando por puntos. Para ello hay que conocer la situación de varios puntos de la derrota ortodrómica distanciados en longitud convenientemente (calculados previamente de forma analítica o en una carta gnomónica polar)

Cálculo analítico de la latitud de un punto de longitud conocida

Sean los puntos A de coordenadas (l, L) y B de coordenadas (l', L') y un punto intermedio T de longitud L_T de la ortodrómica que pasa por A y B.

Llamemos $\Delta L_1 = L_T - L$ y $\Delta L_2 = L' - L_T$



Dado que tanto la ortodrómica como el meridiano P T son círculos máximos;

$\gamma + \gamma' = 180º \quad \Rightarrow \quad \gamma' = 180º - \gamma$

En el triángulo esférico PTA, por el teorema de las cotangentes:

$\text{cotan } (90 - l) \sin (90 - l_T) = \cos (90 - l_T) \cos \Delta L_1 + \sin \Delta L_1 \text{ cotan } \gamma$

o bien: $\tan l \cos l_T = \sin l_T \cos \Delta L_1 + \sin \Delta L_1 \text{ cotan } \gamma$

y despejando cotan γ $$\text{cotan } \gamma = \frac{\tan l \cos l_T - \sin l_T \cos \Delta L_1}{\sin \Delta L_1} \quad (a)$$

Análogamente en el triángulo esférico RTB:

$\text{cotan } (90 - l') \sin (90 - l_T) = \cos (90 - l_T) \cos \Delta L_2 + \sin \Delta L_2 \text{ cotan } (180 - \gamma)$

o bien: $\tan l' \cos l_T = \sin l_T \cos \Delta L_2 - \sin \Delta L_2 \text{ cotan } \gamma$

y despejando cotan γ $$\text{cotan}\ \gamma = \frac{\sin l_T \cos \Delta L_2 - \tan l' \cos l_T}{\sin \Delta L_2} \quad (b)$$

e igualando (a) y (b) tenemos: $$\frac{\tan l \cos l_T - \sin l_T \cos \Delta L_1}{\sin \Delta L_1} = \frac{\sin l_T \cos \Delta L_2 - \tan l' \cos l_T}{\sin \Delta L_2}$$

ordenando, $\tan l \cos L_T \sin \Delta L_2 - \sin l_T \cos \Delta L_1 \sin \Delta L_2 = \sin l_T \cos \Delta L_2 \sin \Delta L_1 - \tan l' \cos l_T \sin \Delta L_1$

o también: $\cos l_T (\tan l \sin \Delta L_2 + \tan l' \sin \Delta L_1) = \sin l_T (\cos \Delta L_2 \sin \Delta L_1 + \cos \Delta L_1 \sin \Delta L_2)$

así: $$\tan l_T = \frac{\tan l \sin \Delta L_2 + \tan l' \sin \Delta L_1}{\sin (\Delta L_2 + \Delta L_1)}$$

Recordemos que una ortodrómica en una carta gnomónica polar es una recta, para aplicar el método gráfico:

- Se traza esta recta, uniendo los puntos de partida y de llegada
- Se divide la recta en los trozos que queramos
- Se pasan las coordenadas de cada punto a una carta mercatoriana
- Se navega entonces loxodrómicamente de punto a punto

NOTAS: Cuanto más cercanos estén los puntos más veces habremos de cambiar de rumbo pero la línea quebrada que sigamos más se parecerá a la ortodrómica

La ventaja principal de la ortodrómica es la menor distancia recorrida

La diferencia de distancias entre la ortodrómica y la loxodrómica se llama ***ganancia***

Para que la ganancia sea sensible, la distancia entre puntos ha de ser grande (navegación transoceánica)

La ganancia es mayor en latitudes altas, pero entonces el vértice de la derrota alcanza latitudes con hielos, nieblas y temporales.

Para evitar ese inconveniente, se usan derrotas mixtas, sin sobrepasar un paralelo determinado.

(en las "Pilot Charts" que edita mensualmente el servicio hidrográfico USA se detallan las derrotas más aconsejables y libres de hielos, brumas o temporales)