

Distancias estrella-estrella

Luis Mederos



Índice general

1. Distancias estrella-estrella y excentricidad del sextante	3
1.1. Introducción	3
1.2. Cálculo de la distancia verdadera estrella-estrella	4
1.3. Corrección por refracción de la distancia estrella-estrella observada	5
2. Aberración estelar	7
2.1. ¿En qué consiste la aberración estelar?	7
2.2. Efecto de la aberración sobre las coordenadas de la estrella	8
3. Medir la velocidad de la luz con el sextante	14

Capítulo 1

Distancias estrella-estrella y excentricidad del sextante

1.1. Introducción

Cuando pensamos en el uso del sextante inmediatamente nos viene a la cabeza la medida de la altura de un astro para obtener una línea de posición (una recta de altura). Si pensamos en otros usos del sextante se nos ocurre la medida del ángulo entre el horizonte y la visual a un faro para obtener, por simple trigonometría, la distancia al faro a partir de su altura sobre el nivel del mar proporcionada por el Libro de Faros. O también pensamos en medir un ángulo horizontal con el que obtener otra línea de posición sobre la carta. Pero hay más posibilidades para entretenernos con nuestro sextante. Una de ellas es medir distancias angulares entre astros en el cielo. Esa es la base de la apasionante técnica de las *distancias lunares* para obtener la hora TU a partir de la distancia angular entre la Luna y otro astro convenientemente elegido (véase el curso sobre distancias lunares en este mismo sitio web).

En esta ocasión quiero hablar de la medida de distancias angulares estrella-estrella y de algunas de sus posibles utilidades. En este primer Capítulo discutiremos como corregir la distancia estrella-estrella medida para tener en cuenta el efecto de la refracción de la luz al atravesar la atmósfera terrestre y obtener entonces la distancia estrella-estrella verdadera. También aprenderemos a calcular esa distancia verdadera a partir de los datos del Almanaque Náutico de forma que podamos comparar con el resultado de nuestra medida. Esa comparación nos permitirá una primera utilidad interesante de este tipo de medidas que es determinar con mucha más precisión de lo habitual el *error de índice* del sextante y su *excentricidad* (pronto veremos que es la excentricidad de un sextante). Una magnífica manera de sacarle partido a nuestro sextante incluso desde casa, desde la terraza o mirando por una ventana...

El error instrumental del sextante al que estamos acostumbrados es el error de índice E_i . Para practicar navegación astronómica tenemos que saber determinar el error de índice del sextante, especialmente si utilizamos sextantes de plástico en cuyo caso debemos comprobarlo siempre antes de cada medida. La manera habitual de determinar el error de índice es alinear las imágenes directa y reflejada del horizonte (o hacerlas coincidir completamente superpuestas si utilizamos un sextante con un espejo *todo horizonte*). La lectura del sextante cuando las imágenes coinciden es el valor de E_i (con el signo adecuado según que la lectura sea hacia la derecha o hacia la izquierda del cero). Este procedimiento para determinar el error de índice es suficiente para el uso habitual del sextante consistente en medir la altura de un astro para obtener una recta de altura. La precisión obtenida para E_i es de, más o menos, 0.5' o algo mejor, dependiendo de lo finos que seamos. Pero, ¿podemos mejorar ese resultado?. Y, más importante aún, no hay nada que nos garantice que el error de índice así determinado (que es válido cuando medimos ángulos muy pequeños) sea el mismo que tenga el sextante cuando medimos otros ángulos mayores como, por ejemplo, 40°, 60°, 80°,.... Un error de índice diferente a lo largo del limbo es lo que se llama excentricidad del sextante y su determinación es muy importante para aplicaciones como las distancias lunares donde la precisión en la medida afecta a la calidad del resultado final de manera crucial.

La distancia entre dos estrellas cambia muy lentamente debido al movimiento propio de las estrellas y a la aberración, un fenómeno éste que se puede utilizar para realizar algún bonito experimento con el sextante como explico en los Capítulos siguientes. La distancia entre dos estrellas que midamos con el sextante sólo ha de ser corregida por refracción (además de por error de índice, obviamente) para obtener la correspondiente distancia estrella-estrella verdadera que sería la que observaríamos desde el centro de la Tierra supuesta transparente y sin atmósfera. Pero, a su vez, esa distancia estrella-estrella verdadera puede predecirse con exactitud sin más que anotar la hora TU de la observación. Con los datos consignados en el Almanaque Náutico para cada una de las dos estrellas en el momento exacto de la observación, el

cálculo de la distancia verdadera es, como veremos más abajo, muy sencillo. Así que la idea es la siguiente: ajustamos el sextante siguiendo el método tradicional, eliminando el error de índice para ángulos muy pequeños haciendo coincidir las dos imágenes del horizonte. Medimos entonces distintas distancias estrella-estrella, corregimos esas distancias por refracción (explicaré seguidamente cómo hacerlo) y comparamos con la distancia verdadera correspondiente (que también explicaré más abajo como calcular). La diferencia entre ambas es el error de índice del sextante correspondiente al ángulo medido. Repitiendo el proceso con diferentes estrellas que se encuentren a diferentes distancias podemos construir una completa tabla de errores de índice de nuestro sextante en función del ángulo medido. Por supuesto, medir una distancia estrella-estrella requiere práctica. Mucha más práctica que para tomar una altura del Sol decente. Cada medida de la distancia tendrá que hacerse repetidamente, 5 ó 6 veces seguidas, anotando el instante TU exacto de cada medida y la correspondiente distancia angular leída del sextante. Promediaremos entonces las medidas y utilizaremos los promedios de la distancia y de los tiempos como única medida. Si queremos tener ciertas garantías de que seremos capaces de utilizar el método de las distancias lunares para determinar la hora con cierta fiabilidad, debemos ser capaces de hacer medidas de distancias estrella-estrella con precisiones mejores que 0.5 minutos de arco.

1.2. Cálculo de la distancia verdadera estrella-estrella

Este es un simple problema de trigonometría esférica. La situación se representa en la siguiente figura 1.1.

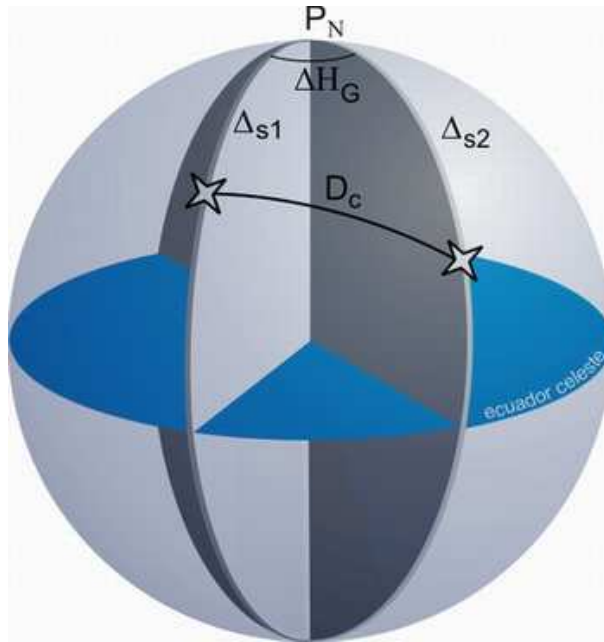


Figura 1.1: Cálculo de la distancia estrella-estrella verdadera a partir de los datos obtenidos del Almanaque Náutico.

Así que la distancia D_c es el lado de un triángulo esférico del que conocemos el ángulo opuesto (que es la diferencia de horarios en Greenwich de ambas estrellas) y los otros dos lados (que son las codeclinaciones de las estrellas). Además, puesto que la medida se hace en un instante TU dado, la diferencia de horarios coincide con la diferencia de ángulos sidéreos de ambas estrellas. Aplicando el teorema del coseno obtenemos directamente la distancia calculada:

$$\cos D_c = \cos \Delta s_1 \cos \Delta s_2 + \sin \Delta s_1 \sin \Delta s_2 \cos \Delta A_S \quad (1.1)$$

donde ΔA_S es la diferencia de ángulos sidéreos de ambas estrellas y las codeclinaciones las definimos con respecto al Polo Norte celeste (así que será $90^\circ - \delta$ si la estrella tiene declinación norte y será $90^\circ + \delta$ si la estrella en cuestión tiene declinación sur, independientemente de en qué hemisferio nos encontremos nosotros).

1.3. Corrección por refracción de la distancia estrella-estrella observada

La refracción de la luz al atravesar las distintas capas de la atmósfera terrestre ocasiona que la trayectoria del haz luminoso procedente de la estrella se curve haciendo que veamos la estrella a una altura mayor de lo que realmente está. Así que ambas estrellas nos aparecen en el cielo a mayor altura de la que en realidad están. La distancia que medimos entre ellas es, por tanto, diferente de la real. La situación es la representada en la figura 1.2.

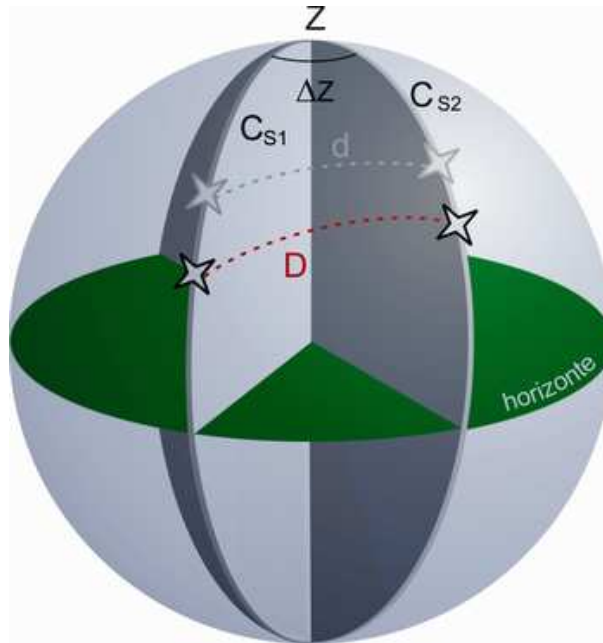


Figura 1.2: Corrección de la distancia estrella-estrella por refracción.

He representado por d la distancia que medimos con el sextante y por D (en rojo) la verdadera distancia, la que debe coincidir con la calculada en la sección anterior. C_{S1} y C_{S2} son los complementarios de las alturas medidas (es decir, sin corregir por refracción). ΔZ es la diferencia entre los azimutes de ambas estrellas. Si en el triángulo esférico que tiene por vértices el cenit y las dos estrellas antes de corregir sus alturas por refracción aplicamos el teorema de los cosenos, obtenemos:

$$\cos d = \cos C_{S1} \cos C_{S2} + \sin C_{S1} \sin C_{S2} \cos \Delta Z \quad (1.2)$$

Pero,

$$C_{S1} = 90^\circ - a_1, \quad C_{S2} = 90^\circ - a_2$$

donde a_1 y a_2 son las alturas medidas (antes de corregirlas por refracción) de la estrella 1 y de la estrella 2, respectivamente. Teniendo en cuenta que $\cos(90^\circ - a) = \sin a$ y que $\sin(90^\circ - a) = \cos a$ para cualquier ángulo a menor de 90° (como es el caso de las alturas), podemos reescribir la ecuación de arriba como:

$$\cos d = \sin a_1 \sin a_2 + \cos a_1 \cos a_2 \cos \Delta Z \quad (1.3)$$

de donde despejamos para obtener:

$$\cos \Delta Z = \frac{\cos d - \sin a_1 \sin a_2}{\cos a_1 \cos a_2} \quad (1.4)$$

Por otra parte, si llamamos A_1 y A_2 a las alturas verdaderas de las estrellas (es decir, a_1 y a_2 corregidas por refracción), podemos escribir una ecuación exactamente igual a la ecuación (1.3) sustituyendo d por D y a_1 y a_2 por A_1 y A_2 , respectivamente, sin más que utilizar ahora el triángulo esférico que tiene por vértices el cenit y las estrellas en sus posiciones verdaderas (en lugar de en sus posiciones aparentes como hicimos para obtener la ecuación (1.3)). Se aplica de nuevo del teorema de los cosenos y obtenemos:

$$\cos D = \sin A_1 \sin A_2 + \cos A_1 \cos A_2 \cos \Delta Z \quad (1.5)$$

Ahora sustituimos en esta ecuación el $\cos \Delta Z$ por la expresión (1.4) con lo que obtenemos:

$$\cos D = \sin A_1 \sin A_2 + \cos A_1 \cos A_2 \frac{\cos d - \sin a_1 \sin a_2}{\cos a_1 \cos a_2} \quad (1.6)$$

que es la expresión necesaria para obtener la distancia estrella-estrella verdadera a comparar con la calculada a través de la ecuación (1.1).

Como vemos, la corrección por refracción de la distancia estrella-estrella no es una simple resta como ocurre con la corrección de la altura de una estrella. Para obtener D necesitamos tanto las alturas aparentes a_1 y a_2 como las alturas verdaderas A_1 y A_2 . Las alturas aparentes podemos medirlas con el sextante en el momento de la medida de la distancia estrella-estrella. El procedimiento correcto sería el siguiente: Medimos a_1 y a_2 (anotando ambas). Seguidamente hacemos las tres, cuatro o cinco medidas seguidas de la distancia estrella-estrella y, finalmente volvemos a mediar a_1 y a_2 . Entonces promediamos las distancias estrella-estrella y las medias de a_1 y las de a_2 quedándonos con tres valores: a_1 , a_2 y d . Ahora corregimos a_1 y a_2 por depresión del horizonte y por refracción (utilizamos las tablas del Almanaque Náutico o la expresión de la corrección R por refracción que encontrarás en el curso en línea sobre distancias lunares) obteniendo A_1 y A_2 . Utilizamos entonces la expresión anterior y calculamos la distancia verdadera D . El inconveniente de este procedimiento es que necesitamos ver el horizonte con el fin de medir las alturas. Como en esta ocasión estamos interesados en la cuestión de la distancia estrella-estrella y no en las alturas, lo que podemos hacer es no medir las alturas sino calcularlas a partir de los datos del Almanaque, nuestra situación exacta (que supondremos conocida) y la hora TU de la observación (que hemos anotado porque la necesitamos para el cálculo de la distancia D verdadera según he explicado más arriba). Resolviendo el correspondiente triángulo de posición obtenemos así las alturas verdaderas en primer lugar, A_1 y A_2 , y ahora obtenemos las alturas aparentes aplicando la corrección por refracción al revés, es decir, sumando R a A_1 y A_2 .

Con lo explicado en este Capítulo ya tienes todos los ingredientes necesarios para construir una tabla de errores de índice de tu sextante, midiendo con mucha paciencia distancias estrella-estrella. Se requiere mucha práctica para hacer este tipo de medidas con precisión de modo que es fundamental repetir medidas de distancias estrella-estrella del mismo orden muchas veces antes de asignar un error de índice a una determinada zona del limbo del sextante pero, como habrás visto, la teoría y los cálculos necesarios son muy sencillos.

En los Capítulos siguientes propondré un bonito experimento a realizar midiendo con el sextante una distancia estrella-estrella, en concreto, la medición de la velocidad de la luz. Se requiere un buen conocimiento del fenómeno de la aberración estelar antes de poder abordar ese experimento de modo que empezaremos por un estudio de la aberración en el siguiente Capítulo.

Capítulo 2

Aberración estelar

2.1. ¿En qué consiste la aberración estelar?

Supongamos una estrella distante que podemos considerar fija (su movimiento propio es despreciable debido a la enorme distancia a la que se encuentra de nosotros). Si la Tierra se encontrase también fija en el espacio, la dirección de la luz que nos llega de la estrella sería, evidentemente, la que une ambos astros (estamos suponiendo que no hay atmósfera y, por tanto, no hay refracción). Sin embargo, la Tierra describe su trayectoria alrededor del Sol dando una vuelta en un año. Eso significa que la Tierra se desplaza por el espacio a una velocidad v . Por otra parte, la luz que nos llega de la estrella viaja a su vez por el espacio a la velocidad c , la velocidad de la luz en el vacío (aproximadamente 300,000 km/s). La dirección aparente con la que vemos llegar la luz de la estrella (y, por tanto, la dirección a lo largo de la que hemos de mirar para ver la estrella) será el resultado de la composición (composición *vectorial* pues estamos manejando velocidades) de ambas velocidades. Estrictamente hablando, esta composición de velocidades ha de hacerse de acuerdo con la Relatividad Especial puesto que una de las velocidades que interviene no es despreciable comparada con la velocidad de la luz. En otras palabras, la aberración estelar es un fenómeno relativista y si uno quiere ser riguroso como tal ha de ser tratado. Pero eso sería demasiado complicado y queda fuera del objetivo de este artículo. Así que nos vamos a limitar aquí a un tratamiento clásico del problema, suficiente para entender lo que pretendemos (y exacto a orden más bajo en v/c como quedará de manifiesto más adelante).

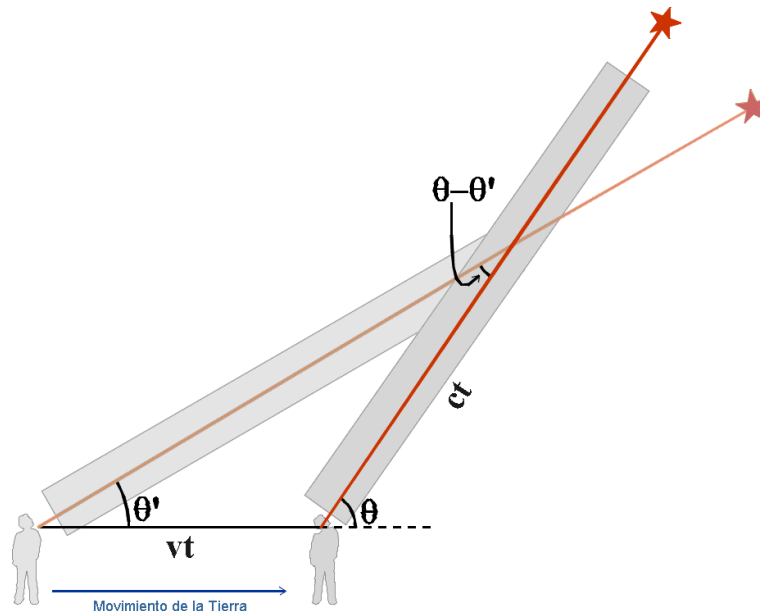


Figura 2.1: En un intervalo de tiempo t , mientras la luz procedente de la estrella viaja una distancia ct , la Tierra se ha desplazado una distancia vt a lo largo de su órbita. La figura no está dibujada a escala ya que en realidad ct es muchísimo mayor que vt .

La figura 2.1 muestra la situación de manera esquemática. Durante un intervalo de tiempo dado t la luz procedente de la estrella viaja una distancia ct mientras que el observador se ha desplazado una distancia vt a lo largo de la órbita de la Tierra. Evidentemente la figura no está dibujada a escala puesto que $ct \gg vt$. De esta manera, la dirección aparente en la que el observador ve a la estrella forma un ángulo θ' con la

dirección de movimiento de la Tierra en lugar de formar el ángulo θ que corresponde a la verdadera dirección en la que se encuentra la estrella y en la que la veríamos si la Tierra estuviese estacionaria en el espacio, es decir, en cada momento a lo largo de la trayectoria anual de la Tierra, el efecto de la aberración consiste en un desplazamiento de la posición aparente de la estrella (la posición que vemos desde la Tierra) con respecto a la posición verdadera, desplazamiento que es en cada momento en la dirección de la velocidad de traslación de la Tierra. La idea intuitiva es muy simple. Es la misma situación que tiene lugar cuando andamos bajo la lluvia (sin viento de modo que la lluvia cae verticalmente). Si nos encontramos parados bajo la lluvia tendremos que poner el paraguas directamente sobre nuestra cabeza. Pero si corremos, tendremos que inclinar el paraguas hacia adelante, en la dirección de nuestro movimiento, para evitar mojarnos. Y tendremos que inclinar más el paraguas cuanto más rápido corramos.

Vamos a estimar ahora el tamaño de este efecto que podemos cuantificar como la diferencia $\theta - \theta'$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo (triángulo plano) de la figura 2.1 obtenemos,

$$\frac{\sin(\theta - \theta')}{vt} = \frac{\sin \theta'}{ct}.$$

Puesto que $vt \ll ct$, θ' y θ son en realidad muy parecidos así que en el segundo miembro de la ecuación anterior podemos sustituir θ' por θ sin introducir un error significativo. Además, la diferencia $\theta - \theta'$ es muy pequeña de modo que podemos aproximar $\sin(\theta - \theta') \simeq \theta - \theta'$ (por supuesto, con $\theta - \theta'$ expresado en radianes en el segundo miembro de esta igualdad). Entonces,

$$\theta - \theta' \simeq \frac{v}{c} \sin \theta \equiv k \sin \theta. \quad (2.1)$$

Como vemos, el efecto es proporcional a $k \equiv v/c$, la llamada **constante de aberración**. Podemos estimar fácilmente el valor promedio de k teniendo en cuenta que la Tierra da una vuelta alrededor del Sol en 1 año. Supongamos que la órbita de la Tierra es circular y de radio igual a la distancia media Sol-Tierra (1 unidad astronómica = $1,49598 \times 10^8$ km). La distancia recorrida por la Tierra en un año es entonces la longitud de ese círculo lo cual da una velocidad media de traslación de $v = 29,8$ km/s. Teniendo en cuenta que la velocidad de la luz es $c = 299792,458$ km/s, obtenemos que $k = 9,94 \times 10^{-5}$ radianes o, lo que es lo mismo, $k = 20,5$ segundos de arco.

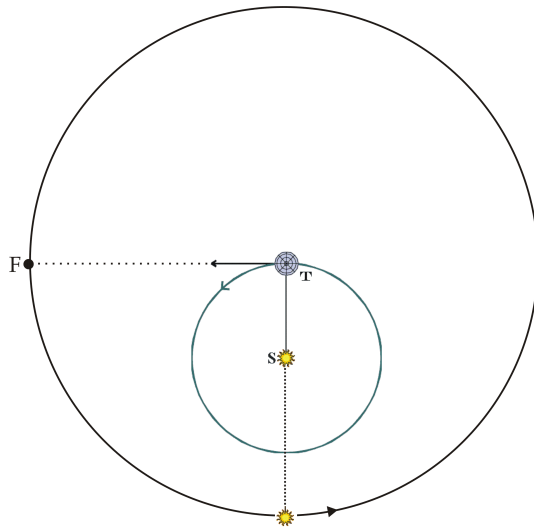


Figura 2.2: Esfera celeste vista desde el polo norte de la eclíptica.

2.2. Efecto de la aberración sobre las coordenadas de la estrella

Queda claro de la sección anterior que, por efecto de la aberración, veremos a la estrella desplazada ligeramente sobre la esfera celeste con respecto a la posición en que la veríamos si la Tierra estuviese estacionaria en el espacio. Por tanto, las coordenadas celestes (ascensión recta y declinación) aparentes de la estrella (las que nosotros vemos desde la Tierra) son diferentes de las verdaderas. ¿Hacia dónde tiene lugar ese desplazamiento de la posición aparente de la estrella sobre la esfera celeste? Pues también está claro de la sección anterior que el desplazamiento es, en cada momento, hacia el punto F de la esfera celeste al que apunta el movimiento de traslación de la Tierra en ese momento (ese punto se llama el *apex*). Determinemos entonces ese punto.

Supongamos inicialmente que la órbita de la Tierra es circular (veremos después qué efecto tiene el que en realidad la órbita sea elíptica en lugar de circular). La figura 2.2 muestra la esfera celeste vista desde arriba, desde el polo norte de la eclíptica (K en la figura 2.3). El círculo azul es la órbita terrestre (supuesta circular). El círculo negro es la eclíptica. Puesto que el radio del círculo y la tangente en un punto son siempre perpendiculares, resulta que sobre la esfera celeste el apex será en cada momento el punto de la eclíptica que está exactamente 90° detrás del Sol en ese momento. Por tanto, el efecto de la aberración sobre la posición de una estrella en la esfera celeste es el representado en la figura 2.3.

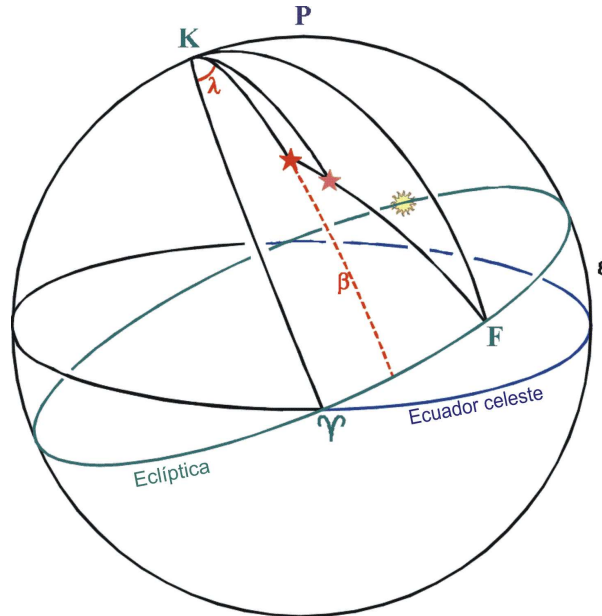


Figura 2.3: Efecto de la aberración estelar sobre las coordenadas celestes de una estrella.

Una estrella en la posición verdadera representada en rojo intenso en la figura 2.3 será observada en la posición dibujada en rojo más tenue en esa misma figura. Es también evidente de esa figura que la manera más sencilla de estudiar cuantitativamente este efecto será ver cómo varían las **coordenadas eclípticas de la estrella** (λ, β), llamadas **longitud eclíptica** y **latitud eclíptica** de la estrella, respectivamente, y definidas por los ángulos (ambos medidos en grados) indicados en la figura 2.3. La latitud eclíptica varía desde -90° hasta $+90^\circ$ mientras que la longitud eclíptica lo hace desde 0° hasta 360° (se mide desde el punto vernal hacia el este a lo largo de la eclíptica). Es obvio que para el Sol su latitud eclíptica es siempre cero mientras que su longitud eclíptica aumenta monotonamente con el tiempo. Asimismo, las coordenadas eclípticas del apex son $\beta = 0^\circ$ y $\lambda = \lambda_\odot - 90^\circ$, donde λ_\odot es la longitud eclíptica del Sol. Conocidas las coordenadas eclípticas de un astro es muy sencillo obtener sus coordenadas ecuatoriales (ascensión recta α y declinación δ) o viceversa. En efecto, basta con tener en cuenta el triángulo esférico cuyos vértices son P , K y el astro. Los lados de ese triángulo tienen los siguientes valores (como es obvio de la figura 2.3):

$$\begin{aligned} KP &= \varepsilon \\ P - \text{estrella} &= 90^\circ - \delta \\ K - \text{estrella} &= 90^\circ - \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

mientras que sus ángulos en los vértices K y P son

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= 90^\circ - \lambda \\ \widehat{P} &= 90^\circ + \alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

con la ascensión recta α medida en grados como es obvio. Con estos datos y los teoremas de la trigonometría esférica resulta trivial pasar de unas coordenadas a otras.

Así que en el estudio de la aberración estelar utilizaremos coordenadas eclípticas. En la figura 2.4 representamos la situación en detalle. En esa figura hemos llamado X a la posición verdadera de la estrella, de coordenadas (λ, β) y X' a la posición aparente, desplazada de X debido a la aberración, de modo que las coordenadas de X' son $(\lambda + \Delta\lambda, \beta + \Delta\beta)$.

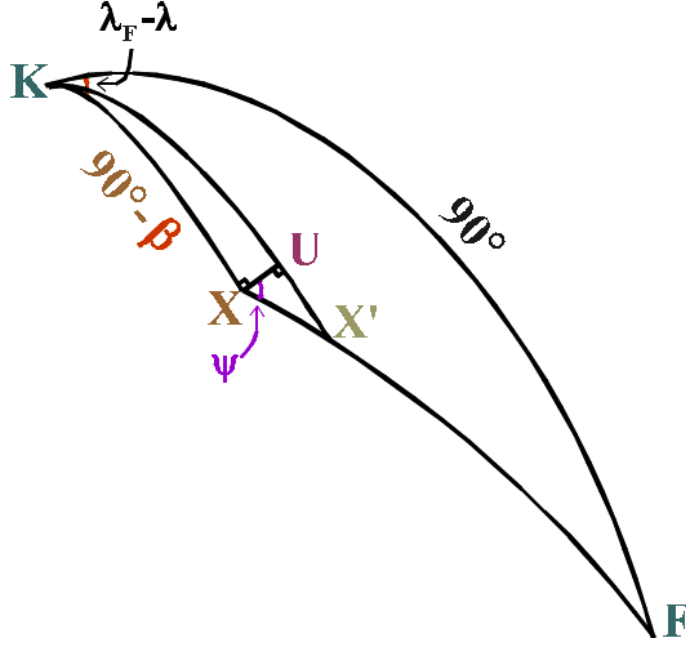


Figura 2.4: Efecto de la aberración estelar sobre las coordenadas celestes de una estrella. Detalle.

El arco XX' es el desplazamiento de la posición de la estrella debido a la aberración. Su valor es, de acuerdo con la figura 2.1, $\theta - \theta'$, es decir, según hemos visto en la sección anterior, $k \sin \theta$, siendo k la constante de aberración. Definimos el punto auxiliar U de modo que XU es un pequeño arco de un círculo menor que pasa por X y cuyo centro es el polo norte de la eclíptica K . Eso define los arcos UX y UX' . Puesto que UX' es un trozo de círculo máximo (de *meridiano* en el sistema eclíptica-polo de la eclíptica K) a lo largo del cuál se mide la latitud eclíptica, resulta que $UX' = -\Delta\beta$ (el signo menos se debe a que la aberración hace disminuir la latitud eclíptica). Por contra, el arco UX es un trozo de *paralelo* en el mismo sistema. Su longitud será, por tanto, el correspondiente *apartamiento* (como si de un simple cálculo de estima se tratara), es decir, $UX = \Delta\lambda \cos \beta$.

Puesto que la aberración es un efecto muy pequeño (es decir, XX' es, como máximo, $20,5''$), el triángulo XUX' es muy pequeño y podemos considerarlo un triángulo rectángulo *plano*. Aplicando trigonometría plana en él obtenemos entonces:

$$UX = XX' \cos \Psi = k \sin \theta \cos \Psi$$

$$UX' = XX' \sin \Psi = k \sin \theta \sin \Psi$$

En otras palabras, teniendo en cuenta los resultados del párrafo anterior para UX y UX' resulta que:

$$\Delta\lambda \cos \beta = k \sin \theta \cos \Psi$$

$$\Delta\beta = -k \sin \theta \sin \Psi \tag{2.4}$$

Como es natural, queremos calcular los desplazamientos $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ en términos de la constante de aberración y de las coordenadas verdaderas de la estrella (λ, β) , es decir, hemos de conseguir eliminar de las expresiones anteriores los ángulos θ y Ψ . Para ello haremos uso del triángulo esférico KXF . Tengamos en cuenta que en este triángulo, de acuerdo con la figura 2.1, se tiene que $\angle XF = \theta$. Por tanto, aplicando el teorema de los senos de la trigonometría esférica, tenemos:

$$\frac{\sin(90^\circ + \Psi)}{\sin(90^\circ)} = \frac{\sin(\lambda_F - \lambda)}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta \cos \Psi = \sin(\lambda_F - \lambda). \tag{2.5}$$

Ahora aplicamos el teorema de los cosenos en el mismo triángulo y obtenemos:

$$\cos(90^\circ) = \cos \theta \cos(90^\circ - \beta) + \sin \theta \sin(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ + \Psi)$$

O sea,

$$0 = \cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta \sin \Psi \Rightarrow \sin \theta \sin \Psi = \frac{\cos \theta \sin \beta}{\cos \beta} \quad (2.6)$$

Aplicando el teorema de los cosenos de nuevo en el mismo triángulo:

$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ - \beta) \sin(90^\circ) \cos(\lambda_F - \lambda) \Rightarrow \cos \theta = \cos \beta \cos(\lambda_F - \lambda).$$

Introduciendo este resultado para $\cos \theta$ en la expresión (2.6) obtenemos:

$$\sin \theta \sin \Psi = \cos(\lambda_F - \lambda) \sin \beta \quad (2.7)$$

Sustituyendo ahora las expresiones (2.5) y (2.7) en las ecuaciones (2.4) obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda \cos \beta &= k \sin(\lambda_F - \lambda) \\ \Delta \beta &= -k \cos(\lambda_F - \lambda) \sin \beta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tengamos en cuenta ahora que, según hemos visto más arriba, $\lambda_F = \lambda_\odot - 90^\circ$ y puesto que $\sin(\lambda_\odot - \lambda - 90^\circ) = -\cos(\lambda_\odot - \lambda)$ y $\cos(\lambda_\odot - \lambda - 90^\circ) = \sin(\lambda_\odot - \lambda)$, podemos reescribir las ecuaciones (2.8) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda \cos \beta &= -k \cos(\lambda_\odot - \lambda) \\ \Delta \beta &= -k \sin(\lambda_\odot - \lambda) \sin \beta \end{aligned} \quad (2.9)$$

que son las expresiones finales que nos permiten obtener la posición aparente de la estrella en un momento dado, $(\lambda + \Delta \lambda, \beta + \Delta \beta)$, a partir de su posición verdadera (λ, β) y de la longitud eclíptica del Sol en ese momento λ_\odot . Analicemos seguidamente esas expresiones.

Como he comentado más arriba, $\Delta \beta$ es directamente el desplazamiento a lo largo del *meridiano* en el sistema eclíptica-polo norte de la eclíptica mientras que el correspondiente desplazamiento a lo largo del *paralelo* es $\Delta \lambda \cos \beta$ (es decir, este es el *apartamiento* en el sistema eclíptica-polo norte de la eclíptica). En otras palabras, si elegimos un sistema de coordenadas (x, y) local, centrado en la posición verdadera de la estrella, con el eje x paralelo a la eclíptica y el eje y perpendicular a ella, resulta que las ecuaciones (2.9) nos dicen que la posición aparente de la estrella se encuentra desplazada, por efecto de la aberración, desde su posición verdadera las siguientes cantidades medidas en ese sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= -k \cos(\lambda_\odot - \lambda) \\ y &= -k \sin(\lambda_\odot - \lambda) \sin \beta \end{aligned}$$

que podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{k^2} &= \cos^2(\lambda_\odot - \lambda) \\ \frac{y^2}{k^2 \sin^2 \beta} &= \sin^2(\lambda_\odot - \lambda) \end{aligned}$$

que, sumadas miembro a miembro dan lugar a:

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 \sin^2 \beta} = 1 \quad (2.10)$$

es decir, la ecuación de una elipse, la **elipse de aberración**, de semiejes k en la dirección paralela a la eclíptica y $k \sin \beta$ en la dirección perpendicular a la eclíptica. En otras palabras, a lo largo de un año, a medida que el Sol describe una vuelta completa a lo largo de la eclíptica y, por tanto, λ_\odot varía de 0° a 360° , una estrella dada describe una pequeña elipse, centrada en su posición verdadera, paralela a la eclíptica y de semieje mayor $k = 20,5''$ en la dirección paralela a la eclíptica y semieje menor $20,5' \sin \beta$ en la dirección

perpendicular a la eclíptica, siendo β la latitud eclíptica verdadera de la estrella. Obsérvese que el semieje mayor de la elipse de aberración no depende para nada de la posición verdadera de la estrella, de modo que es el mismo, k , para todas ellas. El semieje menor, en cambio, depende del seno de la latitud eclíptica de la estrella de modo que ese semieje es cada vez más pequeño a medida que la estrella tiene latitud eclíptica menor (es decir, a medida que está más cerca de la eclíptica). En el caso particular de una estrella situada sobre la eclíptica, para la que $\beta = 0^\circ$, la elipse de aberración se reduce a un arco de eclíptica de longitud $20,5''$ a cada lado de la posición verdadera, es decir, la estrella varía su longitud eclíptica en $41''$ a lo largo de un año.

La posición aparente de una estrella en el cielo en un momento dado cambia con el tiempo no sólo debido al efecto de la aberración sino, también, debido al hecho de que las estrellas tienen *movimiento propio* a través del espacio. Es decir, lo que hemos llamado posición verdadera (λ, β) también cambia con el tiempo debido al movimiento propio de la estrella. Sin embargo, este movimiento propio es muy pequeño (puedes consultar el catálogo Hipparcos a través de las páginas de las constelaciones en este mismo sitio web para ver su magnitud para cada estrella). Además los datos sobre movimiento propio de las estrellas no son enteramente fiables debido a la enorme dificultad en su medición de modo que a los efectos prácticos de analizar la posición aparente de una estrella a lo largo de un sólo año el movimiento propio es generalmente despreciado achacándose todos los cambios en la posición aparente a la aberración. Sin embargo, para objetos mucho más próximos, como los planetas, el movimiento propio no puede ser despreciado puesto que es considerable y, además, bien conocido. De esta manera, las observaciones astronómicas de los planetas encaminadas a determinar su posición han de corregirse no sólo por aberración sino, también, por lo que se llama *tiempo de luz*: en el intervalo de tiempo que transcurre entre que la luz sale del planeta y es medida en la Tierra, el planeta se desplaza una distancia no despreciable. En el caso de los planetas, este efecto suele agruparse con la aberración tal como la hemos descrito (*aberración anual*) dando lugar a la llamada *aberración planetaria*. En este caso, la aberración anual por si sola se conoce también como *aberración estelar*.

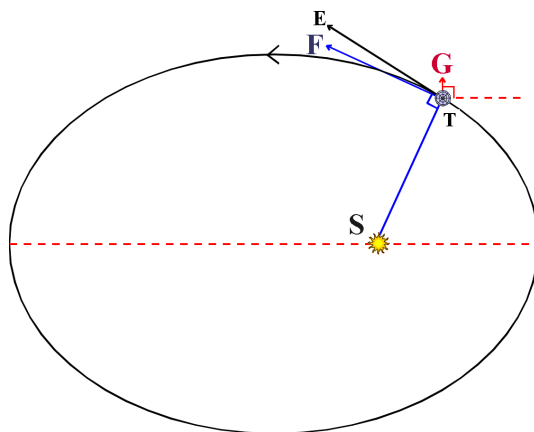


Figura 2.5: Órbita terrestre y descomposición de la velocidad de traslación.

Discutamos ahora, muy brevemente, el efecto de la excentricidad de la órbita terrestre. Hemos basado nuestro análisis de la aberración estelar en la suposición de que la órbita terrestre es circular. Esa suposición da lugar a una k constante porque si la órbita terrestre fuese circular entonces la velocidad de traslación de la Tierra, v , sería constante (como obliga la ley de Kepler de *velocidad areolar* constante, consecuencia directa del carácter central de la fuerza gravitatoria). Pero la órbita terrestre es elíptica con el Sol situado en uno de los focos de la elipse, como se muestra en la figura 2.5.

La velocidad de traslación, representada en la figura por el vector \overrightarrow{TE} , puede descomponerse en cualquier instante en dos componentes, representadas por \overrightarrow{TF} (perpendicular en cada momento al radio vector) y \overrightarrow{TG} (perpendicular en cada momento al semieje mayor de la elipse). Ambas componentes de la velocidad de traslación son constantes en módulo. Sin embargo, no es constante el ángulo que forman entre sí dando lugar a una velocidad de traslación de la Tierra (que es la suma vectorial de ambas componentes) que no tiene módulo constante (como ha de ser para poder cumplir la segunda ley de Kepler y barrer áreas iguales en tiempos iguales). Si sólo existiese la componente \overrightarrow{TF} el movimiento sería circular uniforme (como hemos supuesto en nuestro estudio) dando lugar a una k constante. La componente \overrightarrow{TG} introduce términos de segundo orden muy pequeños (del orden de $0,3''$) que si bien son independientes de la posición de la Tierra si dependen de las coordenadas verdaderas de la estrella. Para los propósitos de estas notas esos términos de segundo orden son despreciables.

Para finalizar esta sección, y a modo de curiosidad simplemente, incluiré el resultado que se obtiene si el estudio de la aberración se realiza utilizando coordenadas ecuatoriales en lugar de coordenadas eclípticas. El

análisis es en ese caso mucho más farragoso y, de hecho, puesto que hemos aprendido más arriba a pasar de unas coordenadas a otras, debería ser posible para el lector derivar las expresiones que pongo a continuación a partir de las ecuaciones (2.9). Utilizando coordenadas ecuatoriales el planteamiento del problema es el mismo: una estrella en posición verdadera (α, δ) es observada desplazada a la posición $(\alpha + \Delta\alpha, \delta + \Delta\delta)$ como consecuencia de la aberración estelar. Se trata de obtener $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$ en términos de (α, δ) y λ_{\odot} que, como antes, es el parámetro que nos indica en qué momento del año nos encontramos. El resultado que se obtiene es:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -k \frac{\cos\alpha \cos\lambda_{\odot} \cos\varepsilon + \sin\alpha \sin\varepsilon}{\cos\delta} \\ \Delta\delta &= -k [\cos\lambda_{\odot} \cos\varepsilon (\tan\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) + \cos\alpha \sin\delta \lambda_{\odot}]\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde ε es la oblicuidad de la eclíptica.

Capítulo 3

Medir la velocidad de la luz con el sextante

En el Capítulo anterior hemos estudiado el fenómeno de la aberración estelar que, en resumen, significa que una estrella dada describe a lo largo de un año una elipse (la elipse de aberración) centrada en su posición verdadera. El tamaño de esa elipse se especifica mediante sus semiejes que son $k = v/c \simeq 20,5''$ a lo largo de la dirección paralela a la eclíptica y $k \sin \beta$ en la dirección perpendicular a la eclíptica, siendo β la latitud eclíptica verdadera de la estrella, v la velocidad de traslación de la Tierra en su órbita alrededor del Sol y c la velocidad de la luz. Ha debido quedar claro en el Capítulo anterior que la aberración estelar es un efecto relativista aunque podamos obtener el resultado correcto utilizando la Física clásica como hicimos en la sección 2.1.

La idea propuesta en este Capítulo es muy simple. Si cada estrella está recorriendo a lo largo de un año una elipse de semieje mayor k , la distancia entre dos estrellas dadas variará a lo largo del año de manera oscilante a medida que cada una de ellas recorre su elipse de aberración. Si elegimos esas dos estrellas convenientemente podemos hacer máxima la amplitud de esa oscilación y el punto interesante es que en ese caso esa amplitud máxima es suficientemente grande como para ser perfectamente medible sin más que repetir periódicamente la medida de la distancia entre esas dos estrellas con el sextante. Estaremos así midiendo un efecto relativista con un simple sextante. Obviamente, la elipse de aberración correspondiente a una estrella dada no podemos medirla con el sextante (no podemos medir posiciones de estrellas en el cielo con el sextante), pero sí podemos medir directamente el efecto relativista de la aberración a través de su influencia en la distancia entre dos estrellas dadas a medida que pasa el tiempo. Vamos a ver entonces cómo elegimos adecuadamente dos estrellas de modo que el efecto sea lo mayor posible y facilitar así la realización del experimento.

Reescribamos las ecuaciones (2.9) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= -k \cos(\lambda_{\odot} - \lambda) \sec \beta \\ \Delta\beta &= -k \sin(\lambda_{\odot} - \lambda) \sin \beta\end{aligned}\tag{3.1}$$

Puesto que, según vimos en el Capítulo anterior, estas son las ecuaciones de una elipse con semieje mayor paralelo a la eclíptica, parece que la manera más sencilla de conseguir la máxima variación posible en la distancia estrella-estrella es empezar por elegir dos estrellas que se encuentren sobre la eclíptica (de modo que sus latitudes eclípticas sean cero). Así el arco de círculo máximo entre ellas es un arco de eclíptica y las ecuaciones anteriores se simplifican quedando, para cada una de las dos estrellas, $\Delta\lambda = -k \cos(\lambda_{\odot} - \lambda)$ y $\Delta\beta = 0$. En este caso particular la distancia D_c entre ambas estrellas es directamente la diferencia de longitudes eclípticas:

$$D_c = \lambda_2 + \Delta\lambda_2 - \lambda_1 - \Delta\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 + k [\cos(\lambda_{\odot} - \lambda_1) - \cos(\lambda_{\odot} - \lambda_2)]$$

donde λ_1 y λ_2 son las longitudes eclípticas verdaderas de ambas estrellas. Si no existiese el fenómeno de la aberración, la distancia entre las dos estrellas sería constante e igual a $\lambda_2 - \lambda_1$. El segundo término, proporcional a k , es oscilatorio y es el efecto de la aberración estelar. Para hacer máxima la amplitud de esa oscilación es evidente que lo que hemos de hacer es elegir dos estrellas de modo que tengan longitudes eclípticas que se diferencien en 180° , es decir, $\lambda_2 = \lambda_1 + 180^\circ$. En ese caso los dos cosenos del segundo miembro son iguales pero cambiados de signo con lo que se suman dando lugar a una oscilación de amplitud

$4k = 82''$, es decir, la variación entre el máximo y el mínimo de D_c a lo largo de un año es de más de un minuto de arco, perfectamente medible con un sextante. Sin embargo, si existieran esas dos estrellas situadas sobre la eclíptica separadas 180° no serían útiles para la medida pues no serían visibles simultáneamente. Supongamos entonces que ambas estrellas se encuentran sobre la eclíptica separadas un ángulo α , es decir $\lambda_2 = \lambda_1 + \alpha$. Entonces la distancia entre ambas es:

$$D_c = \alpha + k [\cos(\lambda_\odot - \lambda_1) - \cos(\lambda_\odot - \lambda_1 - \alpha)] = \alpha + k [\cos(\lambda_\odot - \lambda_1) - \cos(\lambda_\odot - \lambda_1) \cos \alpha - \sin(\lambda_\odot - \lambda_1) \sin \alpha]$$

Esta ecuación indica que si elegimos dos estrellas separadas 90° a lo largo de la eclíptica entonces la distancia entre ellas será,

$$D_c = 90^\circ - k [\sin(\lambda_\odot - \lambda_1) - \cos(\lambda_\odot - \lambda_1)]$$

Cuando el Sol se encuentre en longitud eclíptica $\lambda_\odot = \lambda_1 + 90^\circ$ la distancia entre ambas estrellas será mínima e igual a $90^\circ - k$. La condición $\lambda_\odot = \lambda_1 + 90^\circ$ significa, según lo que vimos en el Capítulo anterior, que la estrella 1 está en el apex en ese momento, es decir, se encuentra en el punto de la esfera celeste al que apunta el movimiento de traslación de la Tierra en ese momento. Lo interesante es que el término oscilatorio entre corchetes de esa ecuación es una función sinusoidal de periodo 2π y amplitud algo menor de 3, como se muestra en la figura 3.1 que representa la función $\sin x - \cos x$ (téngase en cuenta que sustituir x por $x - \lambda_1$ no cambia la periodicidad ni la amplitud de la función, solamente mueve la curva horizontalmente de manera global).

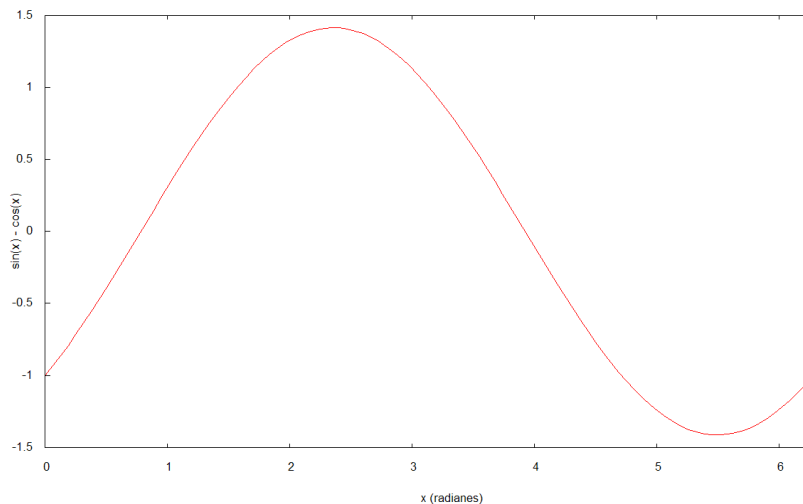


Figura 3.1: Función $\sin x - \cos x$.

Es decir, que dos estrellas sobre la eclíptica y separadas entre sí 90° (diferencia entre sus longitudes eclípticas verdaderas, se entiende) darían lugar a una oscilación en la distancia que las separa con una amplitud de algo menos de $3k$, o sea, algo menos de un minuto de arco, perfectamente medible con el sextante. Como es evidente, no existen dos estrellas exactamente sobre la eclíptica y separadas exactamente 90° , pero si existen dos candidatas bastante próximas a cumplir esas condiciones, como se puede ver en la figura 3.2 que muestra la carta del cielo para latitudes N medias en abril de 2006.

Como se aprecia rápidamente, dos son las estrellas fácilmente visibles para ser medidas que se encuentran muy próximas a la eclíptica: Spica y Pollux (Régulo se encuentra prácticamente sobre la eclíptica pero separada de cualquiera de las otras dos unos 45°). Así que nuestro experimento consistirá en medir la distancia Spica-Pollux, anotando cuidadosamente la hora TU de la medida. Repetiremos esa medida digamos que 1 vez por semana durante unos meses. Representamos entonces los resultados para la distancia estrella-estrella corregida por refracción (como hemos visto en el Capítulo 1 de estas notas) frente al tiempo y, si nuestras medidas han sido lo suficientemente finas, debemos obtener una distancia oscilante debido a la aberración estelar. Habremos entonces sido capaces de detectar un efecto puramente relativista mediante un simple sextante. Desde nuestras latitudes Spica y Pollux son visibles desde mediados de noviembre (de madrugada justo antes de la salida del Sol) hasta principios de junio (justo después de la puesta de Sol en cuanto el cielo oscurece lo suficiente), el resto del año estas estrellas están sobre nosotros durante el día. Por tanto es durante la primera mitad del año cuando podemos realizar el experimento.

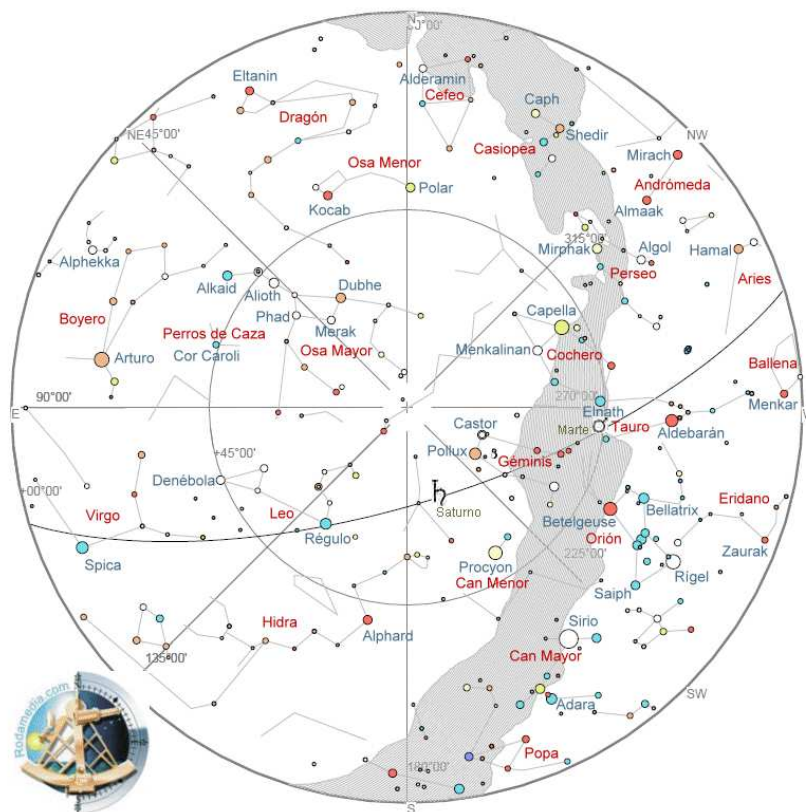


Figura 3.2: El cielo en Abril de 2006 visto desde los 40° de latitud N. Esta carta del cielo corresponde a 20 horas de tiempo universal a principios de mes.

Podemos precalcular el resultado que debemos medir, obteniendo la distancia Spica-Pollux a partir de los datos de ambas estrellas (como hemos aprendido en el primer Capítulo de estas notas). Sin embargo, no podemos hacer este cálculo utilizando los datos del Almanaque Náutico ya que esa publicación proporciona el ángulo sidéreo y la declinación de las estrellas solamente el día 15 de cada mes y, lo que es peor, redondeados ambos a la décima de minuto de arco. Esa precisión, que es suficiente para obtener una recta de altura suficientemente precisa, no basta para obtener una curva de la distancia Spica-Pollux suficientemente precisa. El lector puede entretenerse en ese cálculo (fue mi primer intento al pensar en este experimento) y encontrará una distancia oscilante como se espera (los cálculos del Almanaque Náutico tienen en cuenta, como debe ser, la aberración estelar). Sin embargo, el ruido obtenido, debido a la falta de precisión en los valores del ángulo sidéreo y la declinación de las estrellas introducida por el redondeo, es tan grande que hace inútil el cálculo. Es necesario entonces recurrir a cálculos más precisos.

Podemos utilizar por ejemplo el programa *cartes du ciel* (disponible en <http://www.rodamedia.com>). Este programa, además de dibujar muy útiles cartas del cielo a medida del usuario, proporciona las posiciones de las estrellas (ascensión recta y declinación) con hasta dos decimales en los segundos (de tiempo y de arco, respectivamente), precisión suficiente para nuestros propósitos. Yo he utilizado una versión modificada para este propósito del Almanaque Procivel, pidiéndole que escriba las posiciones con esa precisión. Las posiciones de Spica y Pollux obtenidas son las mostradas en la figura 3.3.

Con los datos de posición de ambas estrellas ya podemos calcular la distancia entre ellas tal y como hemos explicado en el Capítulo 1. El resultado se muestra en la figura 3.4.

Como puede observarse, el comportamiento de la distancia estrella-estrella es el esperado teniendo en cuenta el análisis que hemos hecho más arriba para estrellas que se encuentran sobre la eclíptica y separadas entre sí 90° que es aproximadamente el caso de Spica y Pollux. La amplitud de la oscilación es de $0,016^\circ = 0,96'$, perfectamente medible con el sextante.

Puesto que Pollux y Spica no se encuentran exactamente sobre la eclíptica no podemos analizar el resultado utilizando las ecuaciones simples de esta sección. Por el contrario, si queremos hacer un análisis cuantitativo del resultado de nuestras medidas tendremos que manejar el cálculo general de la distancia entre dos estrellas situadas en $(\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \beta_1 + \Delta\beta_1)$ y $(\lambda_2 + \Delta\lambda_2, \beta_2 + \Delta\beta_2)$ con los desplazamientos $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ dados por las expresiones (2.9). En otras palabras, lo que podemos hacer, utilizando un ordenador y los valores conocidos (obtenidos de un catálogo de estrellas) de las posiciones verdaderas (λ_1, β_1) y (λ_2, β_2) de Spica y Pollux, es calcular el valor de k que mejor ajusta los datos medidos de la distancia entre ambas

Todos los días a 04:00:00 TU

Spica AS (hms)	Spica Dec(° ' '')	Pollux AS	Pollux Dec(° ' '')	Fecha
13 25 28.72	-11 -11 -24.84	7 45 41.33	28 00 46.57	17 noviembre 2005
13 25 28.91	-11 -11 -25.87	7 45 41.60	28 00 46.13	24 noviembre 2005
13 25 29.07	-11 -11 -26.66	7 45 41.80	28 00 45.63	1 diciembre 2005
13 25 29.31	-11 -11 -28.04	7 45 42.07	28 00 45.32	8 diciembre 2005
13 25 29.52	-11 -11 -29.10	7 45 42.25	28 00 44.90	15 diciembre 2005
13 25 29.76	-11 -11 -30.55	7 45 42.46	28 00 44.84	22 diciembre 2005
13 25 29.98	-11 -11 -31.75	7 45 42.60	28 00 44.63	29 diciembre 2005
13 25 30.25	-11 -11 -33.42	7 45 42.78	28 00 44.76	5 enero 2006
13 25 30.49	-11 -11 -34.76	7 45 42.89	28 00 44.67	12 enero 2006
13 25 30.73	-11 -11 -36.31	7 45 42.99	28 00 45.04	19 enero 2006
13 25 30.95	-11 -11 -37.60	7 45 43.04	28 00 45.15	26 enero 2006
13 25 31.19	-11 -11 -39.19	7 45 43.10	28 00 45.66	2 febrero 2006
13 25 31.41	-11 -11 -40.48	7 45 43.11	28 00 45.83	9 febrero 2006
13 25 31.59	-11 -11 -41.77	7 45 43.08	28 00 46.48	16 febrero 2006
13 25 31.77	-11 -11 -42.84	7 45 43.03	28 00 46.74	23 febrero 2006
13 25 31.94	-11 -11 -44.05	7 45 42.98	28 00 47.41	2 marzo 2006
13 25 32.10	-11 -11 -45.03	7 45 42.91	28 00 47.62	9 marzo 2006
13 25 32.21	-11 -11 -45.84	7 45 42.79	28 00 48.29	16 marzo 2006
13 25 32.33	-11 -11 -46.55	7 45 42.69	28 00 48.46	23 marzo 2006
13 25 32.42	-11 -11 -47.23	7 45 42.56	28 00 49.03	30 marzo 2006
13 25 32.52	-11 -11 -47.84	7 45 42.46	28 00 49.10	6 abril 2006
13 25 32.55	-11 -11 -48.16	7 45 42.31	28 00 49.56	13 abril 2006
13 25 32.62	-11 -11 -48.52	7 45 42.21	28 00 49.51	20 abril 2006
13 25 32.64	-11 -11 -48.73	7 45 42.08	28 00 49.82	27 abril 2006
13 25 32.69	-11 -11 -49.01	7 45 42.01	28 00 49.66	4 mayo 2006
13 25 32.66	-11 -11 -48.93	7 45 41.89	28 00 49.84	11 mayo 2006
13 25 32.67	-11 -11 -49.05	7 45 41.85	28 00 49.55	18 mayo 2006
13 25 32.65	-11 -11 -48.88	7 45 41.76	28 00 49.38	25 mayo 2006
13 25 32.65	-11 -11 -48.93	7 45 41.76	28 00 49.25	1 junio 2006
13 25 32.58	-11 -11 -48.57	7 45 41.70	28 00 49.17	8 junio 2006
13 25 32.58	-11 -11 -48.53	7 45 41.73	28 00 48.74	15 junio 2006
13 25 32.50	-11 -11 -48.11	7 45 41.72	28 00 48.53	22 junio 2006
13 25 32.47	-11 -11 -48.00	7 45 41.79	28 00 48.12	29 junio 2006
13 25 32.37	-11 -11 -47.44	7 45 41.81	28 00 47.86	6 julio 2006
13 25 32.34	-11 -11 -47.31	7 45 41.92	28 00 47.38	13 julio 2006

Figura 3.3: Ascensión recta y declinación de Spica y Pollux obtenidas del Almanaque Procivil modificado para que escriba los resultados con dos decimales en los segundos de tiempo y de arco en lugar de redondear a la décima de minuto.

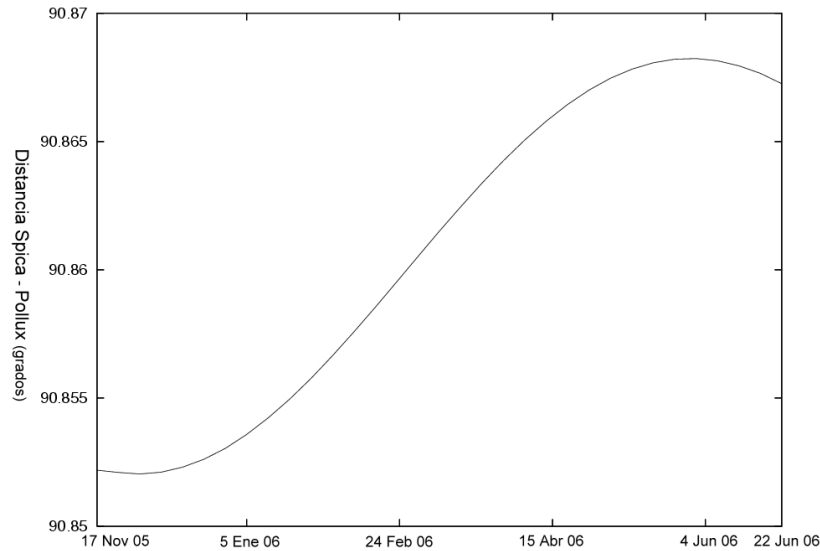


Figura 3.4: Distancia estrella-estrella entre Spica y Pollux a lo largo de la primera mitad de 2006.

estrellas. Conocido el valor de k obtenemos nuestro valor experimental de c a partir del valor conocido de la velocidad de traslación de la Tierra.