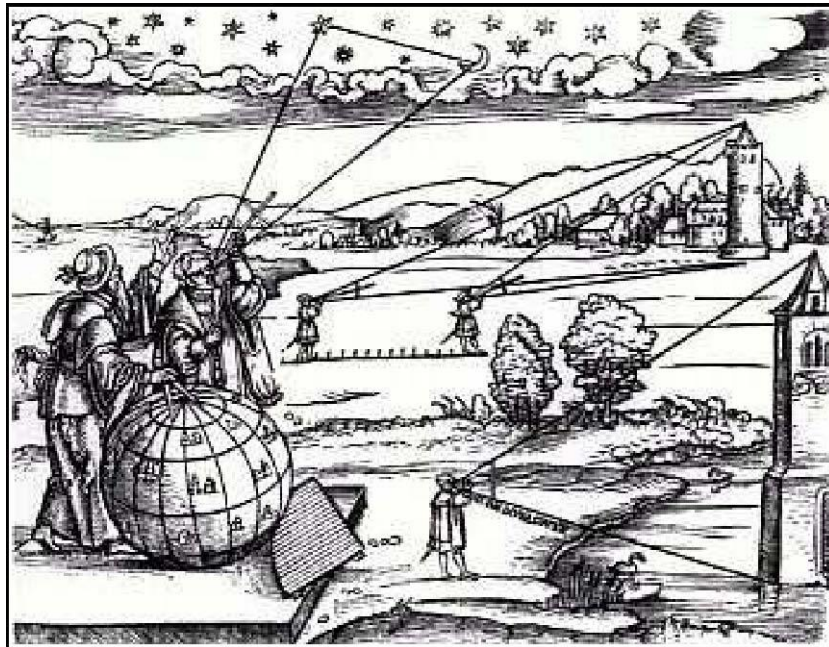


Breve Introducción a la Navegación Astronómica



Copyright © 1997-2006 Henning Umland

Todos los Derechos Reservados

Revisión: Abril 2006. Primera Publicación: 20 de mayo 1997. Traducido del inglés original por Wolfpeter Stockfleth/CY y Llorenç Coll/CY; Barcelona. Septiembre-2009.

Aviso Legal

1. Licencia y propiedad intelectual

La publicación “Breve Introducción a la Navegación Astronómica”, incluyendo todas sus carpetas, capítulos y apartados, es propiedad y está sometida a derechos del autor

Henning Umland, © Copyright 1997-2006, todos los derechos reservados.

Concedo al usuario una licencia gratuita, no exclusiva para descargar el archivo con fines de uso personal y formativo así como para cualquier propósito legal y no comercial mientras se mantengan los términos de este acuerdo. Para utilizar el archivo “astro.zip” o bien su contenido, con cualquier propósito comercial, tanto interno como externo, ha de obtenerse una licencia expresa del autor.

2. Distribución

Pueden reproducirse y distribuirse copias gratuitas de ésta publicación a terceras personas mientras no se pretenda obtener un beneficio de ello y manteniéndolas completas e inalteradas. No está permitida la extracción parcial de texto ni la de gráficas de esta publicación.

3. Declinación de responsabilidades

Ofrezco toda la publicación y su contenido “como tal”, sin la inclusión de garantías expresas ni implícitas de ningún tipo, no limitando su aplicación a cualquier uso particular. No concedo representaciones o garantías de ningún tipo, tampoco con respecto a ningún servicio de accesoria ni mantenimiento, que dependen enteramente del usuario. No doy garantías de que esta publicación cubra sus expectativas, aunque puedan ser ilimitadas, ni tampoco de que aquellas estén libres de cualquier error. Usted asume toda responsabilidad por la selección, posesión y uso de los documentos y por la verificación de los resultados obtenidos con la aplicación de las fórmulas, procedimientos, diagramas u otra información mencionada en la documentación.

Henning Umland,

01 de enero de 2006

*Felix qui potuit boni
fontem visere lucidum,
felix qui potuit gravis
terrae solvere vincula.*

Boethius

Introducción

¿Por qué razón hemos de seguir practicando la navegación astronómica en la era de la electrónica y del GPS y por qué algunos fotógrafos siguen revelando fotografías en blanco y negro en su cuarto oscuro, en vez de usar una sofisticada cámara digital a todo color? La respuesta es probablemente la misma: Porque vale la pena y es un arte muy noble. Sin duda, el navegador GPS es una herramienta muy potente, pero su uso se convierte rápidamente en rutina. En cambio, el arte de la navegación astronómica es una alternativa intelectual. Encontrar nuestra posición geográfica por medio de observaciones astronómicas requiere conocimientos, criterio y habilidad. En otras palabras, hemos de saber utilizar nuestro cerebro. Aquellos que nunca reflexionan conocen el tono en el que hablo de ello. En el camino está el objetivo.

Durante cientos de años, generaciones enteras de navegantes, astrónomos, geógrafos, matemáticos y fabricantes de instrumentos han desarrollado el arte y la ciencia de la navegación astronómica y las han llevado a su nivel actual. Los conocimientos que han sido requeridos para ello son un tesoro que debería conservarse. Además, la navegación astronómica representa la verdadera capacidad del pensamiento y de la creatividad científica de la era preelectrónica. Finalmente, aunque no por último, la navegación astronómica puede resultar una alternativa muy apreciada cuando el receptor GPS comienza a fallar.

Cuando leía mi primer libro sobre navegación, muchos años atrás, el capítulo sobre navegación astronómica con sus fascinantes diagramas y fórmulas atrajo inmediatamente mi particular interés, a pesar de que, inicialmente, me asustaba un poco su complejidad. Cuando he tenido algo más de práctica tuve que admitir, que la navegación astronómica, en realidad no es ni mucho menos tan complicada como parece en el primer momento. Cuando he estudiado la bibliografía encontré que muchos libros, aunque llenos de información producían más confusión que aclaración, probablemente porque la mayoría de ellos habían sido escritos por expertos y para expertos. Otras publicaciones, en cambio, diseñadas por ejemplo, como libros de cocina, describían paso a paso las instrucciones del procedimiento sin aportar mucho sobre la base teórica. En mi opinión no puede entenderse verdaderamente la navegación astronómica y disfrutar de su belleza e ingenio sin conocer los argumentos matemáticos en que se basa.

Al no disponer de algo que cubriera verdaderamente mis necesidades, fue cuando decidí escribir un manual para mi uso personal que habría de incluir las definiciones, fórmulas, diagramas y procedimientos más importantes. La idea de publicarlo me vino en 1997, cuando comencé a interesarme por las posibilidades de Internet, encontrando en ello un medio ideal para comparar conocimientos entre sí. Fue entonces cuando recurrí a mi manuscrito y lo volví a escribir en formato HTML, publicándolo en mi propia página WEB. Más tarde lo he convertido en formato PDF, un standard universalmente aceptado hoy día para publicaciones en soporte electrónico.

El estilo de mi trabajo puede diferir del de los tradicionales libros sobre el tema. Probablemente ello se deba a mi diferente perspectiva al respecto. Cuando comencé este proyecto, yo era un novato en el mundo de la navegación, aunque tenía una base en ciencias naturales y en publicaciones científicas. Desde el principio, me propuse aportar información científica estructurada de forma comprensible. El lector ha de juzgar hasta qué punto esta intención ha tenido éxito. He encontrado más interesados en navegación astronómica de lo esperado y deseo agradecer desde aquí a los lectores de todo el mundo sus atractivos comentarios y sugerencias. Sin embargo, debido al creciente volumen de correspondencia, ya no estoy en condiciones de contestar cada cuestión individualmente o de aportar asesoramiento personalizado. Lamentablemente me veo obligado a dedicarme también a otros asuntos como, por ejemplo, trabajar para poder vivir. A pesar de ello, sigo dedicando a esta publicación mi tiempo libre.

Siento las equivocaciones, errores gramaticales y puntuaciones inadecuadas. He tratado de hacerlo lo mejor que me ha sido posible, pero el idioma inglés no es mi lengua materna. Finalmente, aunque no por última vez, ruego a mi esposa me disculpe mi dedicación de incontables horas a la pantalla del ordenador, levantarme tarde, y mostrarme negligente en las obligaciones domésticas. Intentaré enmendarme. Algún día...

10 de abril 2006

Henning Umland

Dirección postal:

Dr. Henning Umland
Rabenhorst 6
21244-Buchholz i. d.N.
Germany
Fax: +49 (0)721 151296535

Índice

Introducción

Aviso Legal

Capítulo 1 Fundamentos de Navegación Astronómica por la Esfera Celeste

Capítulo 2 Medición de Alturas

Capítulo 3 La Posición Geográfica y el Horario

Capítulo 4 Encontrar una Posición Observada

Capítulo 5 La Posición de un Barco en Navegación

Capítulo 6 Métodos para obtener la Latitud y la Longitud

Capítulo 7 Cálculo del Horario y la Longitud por Distancias Lunares

Capítulo 8 Ortos, Ocasos y Crepúsculos

Capítulo 9 Aspectos Geodésicos de la Navegación Astronómica

Capítulo 10 Trigonometría Esférica

Capítulo 11 El Triángulo Náutico de Posición

Capítulo 12 Fórmulas para Cálculos Náuticos

Capítulo 13 Cartas Náuticas y Representación Gráfica de Cartas en Blanco

Capítulo 14 La Declinación Magnética

Capítulo 15 Efemérides del Sol

Capítulo 16 Errores de Cálculo en Navegación

Bibliografía

Fundamentos de Navegación Astronómica por la Esfera Celeste

La navegación astronómica por la esfera celeste, una rama de la astronomía aplicada, es el arte y la ciencia de encontrar una posición geográfica por medio de observaciones astronómicas, especialmente por medición de **las alturas** de los cuerpos celestes (el Sol, la Luna, los planetas o las estrellas) sobre el horizonte del observador.

Un observador que contemple el firmamento nocturno sin poseer conocimientos de geografía ni de astronomía puede tener espontáneamente la impresión de encontrarse sobre un plano y estar situado en el centro de una enorme semiesfera hueca, con los cuerpos celestes pegados sobre su superficie interior. En realidad, este modelo simplista del universo se mantuvo actualizado y en uso durante milenios y fue desarrollado por los astrónomos de la antigüedad hasta un altísimo grado de perfección. Incluso hoy en día se trata de una herramienta totalmente en uso para la navegación astronómica cuando los navegantes miden **posiciones aparentes** de los astros sobre el firmamento, igual que los antiguos astrónomos, y no su posición absoluta en el espacio.

La posición aparente de un astro sobre la esfera celeste se define por un **sistema de coordenadas referidas al horizonte**. En este sistema el observador se sitúa en el centro de una gran esfera ficticia y hueca, de diámetro infinito y denominada **esfera celeste**, que se divide en dos hemisferios por el plano que representa el **horizonte celeste** (Fig. 1-1). La **altura H** es el arco de círculo máximo medido desde y sobre el horizonte celeste hasta el astro, desde 0° hasta +90° cuando el astro está sobre el horizonte (astro visible) y desde 0° hasta -90° cuando se encuentra bajo el mismo (astro invisible). La **distancia cenital "z"** es el arco de círculo vertical entre el astro correspondiente y el **cenit**, un punto imaginario, situado verticalmente sobre la cabeza del observador. La distancia cenital se mide de 0° hasta 180°. El punto opuesto al cenit se llama **nadir** ($z = 180^\circ$). H y z son **ángulos complementarios** ($H+z = 90^\circ$). El **azimut verdadero, Az_v** es la demora o dirección de la proyección vertical del astro sobre el horizonte, medido desde 0° hasta 360° en el sentido de las agujas del reloj.

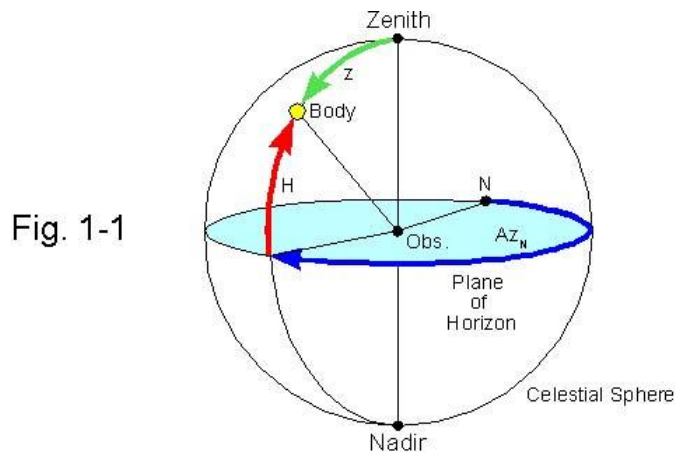


Fig. 1-1

En realidad, el observador **no está** situado sobre el plano del horizonte celeste. La Fig. 1-2 muestra los tres planos horizontales, determinantes para la navegación astronómica.

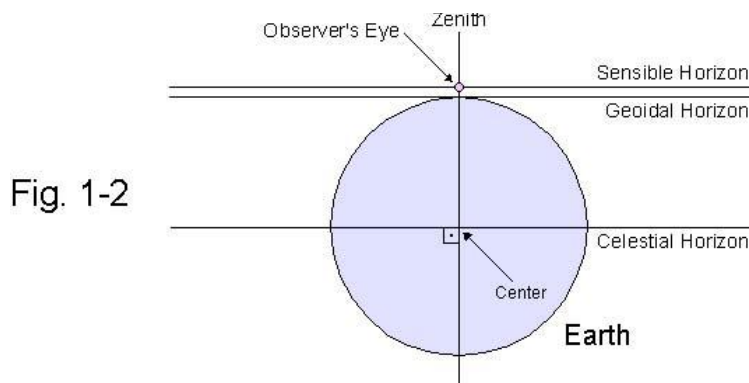


Fig. 1-2

El **horizonte celeste, racional, geocéntrico o verdadero** es el plano horizontal que pasa por el centro de la Tierra, el cual coincide también con el centro de la esfera celeste. El **horizonte geoidal** es el plano horizontal tangente a la Tierra en la posición del observador. El **horizonte sensible** es el plano horizontal que pasa por la visual del observador. Estos tres planos horizontales son todos paralelos entre sí.

El horizonte sensible coincide con el geoidal cuando la visual del observador se encuentra sobre el mar o en la línea de base. Ambos horizontes suelen coincidir casi el uno con el otro; pueden considerarse idénticos para cuestiones de orden práctico. Ninguno de los planos horizontales mencionados arriba coincide con el **horizonte visible, aparente o de la mar**, que es la línea sobre la cual la superficie de la Tierra parece encontrarse con el cielo.

Los cálculos de navegación astronómica siempre se refieren a la altura geocéntrica de un cuerpo celeste. La altura medida por un observador ficticio situado sobre el plano del horizonte celeste con respecto al centro de la Tierra, coincidente con el centro de la esfera celeste.

Por ello mismo, no existe la posibilidad de medir directamente la altura geocéntrica. Ha de ser deducida de la altura referida al horizonte visible (aparente o de la mar) o al sensible (correcciones de altura, capítulo 2).

El **sextante náutico** es el instrumento adecuado para tomar la medida de las alturas de los astros con respecto al horizonte aparente, visible o de la mar. Aquellos instrumentos que disponen de algún tipo de **horizonte artificial** miden la altura sobre el horizonte sensible (capítulo 2).

La altura y la distancia cenital de un astro dependen de la distancia entre el observador terrestre y la **posición geográfica del astro**. GP es el punto imaginario de intersección de la superficie terrestre con la línea recta imaginaria trazada desde el astro al centro de la Tierra (*C*, en la Fig. 1-3), llamado **punto astral o polo de iluminación** del astro.

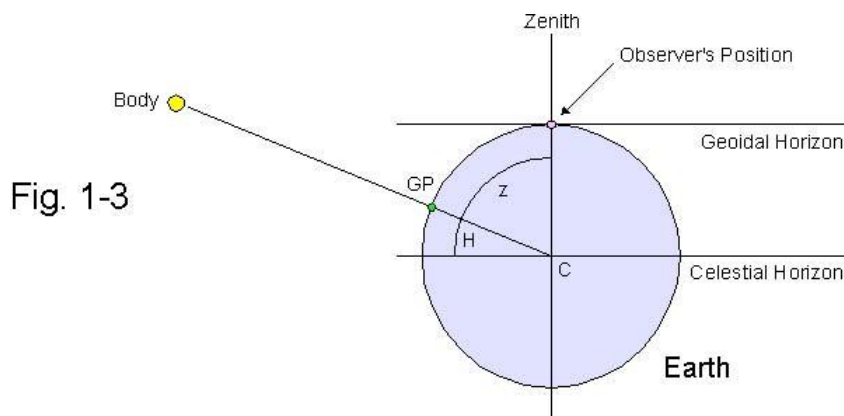
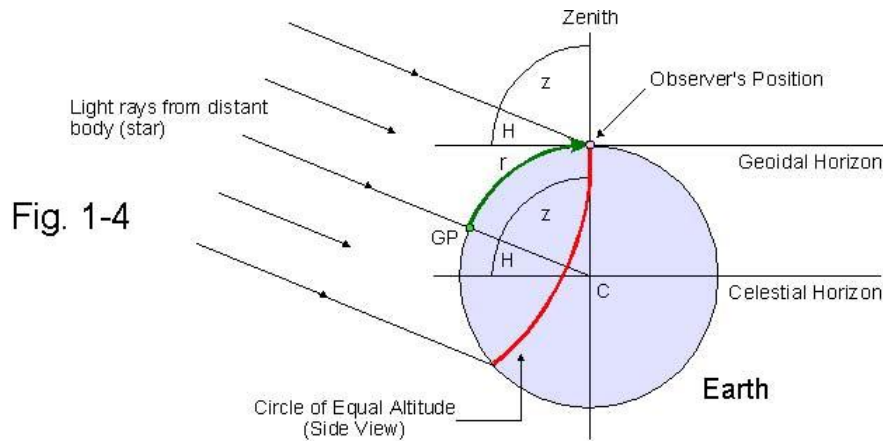


Fig. 1-3

Un astro aparece en el cenit ($z=0^\circ$; alt.= 90°) cuando su GP coincide con la posición del observador. Así, un observador terrestre que se desplazara desde la posición GP, observaría que la altura del astro decrece a medida que aumenta su distancia al polo de iluminación del astro. El astro se encontraría sobre el horizonte celeste (alt.= 0° ; $z=90^\circ$) cuando el observador se hubiese desplazado desde GP una distancia correspondiente a la cuarta parte del perímetro total de la circunferencia de la Tierra.

Para una altura de un astro hay infinitas posiciones que tienen la misma distancia a GP y éstas forman un círculo sobre la superficie de la Tierra, cuyo centro está sobre la línea C-GP (*Fig. 1-4*). Este mal llamado círculo se denomina **“circunferencia de alturas iguales”**. Un observador que recorriera una circunferencia de alturas iguales mediría una altura y una distancia cenital constante para el astro en cuestión, independientemente de donde se encuentre sobre dicha circunferencia. El radio “r” de la misma, medido a lo largo de la superficie terrestre, es directamente proporcional a la distancia cenital “z” observada.



$$r [nm] = 60 \cdot z [^\circ], \quad \text{o bien,} \quad r [km] = \text{Perímetro Terrestre} [km] \cdot z [^\circ] / 360^\circ$$

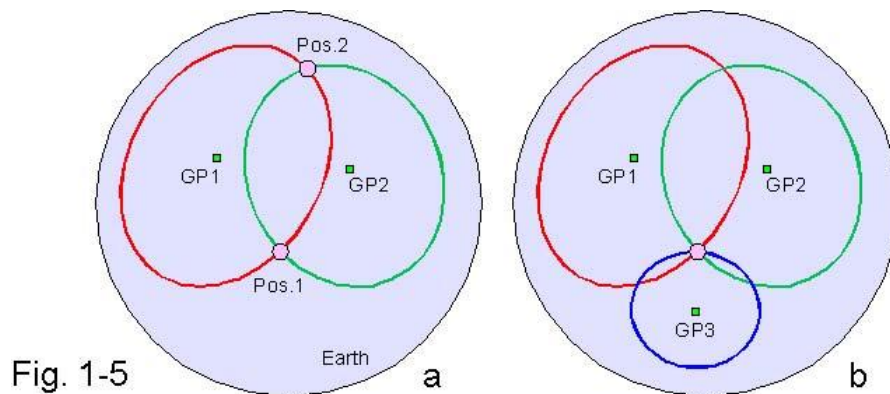
Una milla náutica (1 Mn=1,852 km) es la distancia correspondiente a un minuto de **arco del círculo máximo** terrestre, (la definición de círculo máximo se encuentra en el Capítulo 3). El perímetro de la Tierra tiene 40.031,6 km de longitud.

Los rayos luminosos originados por objetos muy distantes (estrellas) son prácticamente paralelos entre sí cuando alcanzan la superficie terrestre. Por ello la altura sobre el horizonte es prácticamente coincidente con la del horizonte celeste. No, en cambio los rayos procedentes de astros relativamente cercanos, como los incluidos en el Sistema Solar. Ello nos conduce a diferencias considerables al medir ambas alturas (paralaje). El efecto es máximo cuando se observa la Luna, que parece muy cercana a la Tierra (véase Capítulo 2, Fig. 2-4).

El azimut de un astro depende de la posición del observador en la circunferencia de alturas iguales y puede asumir cualquier valor entre 0° - 360°.

Cada vez que medimos la altura o la distancia cenital de un astro hemos obtenido información parcial sobre nuestra propia posición geográfica porque sabremos que estamos en algún lugar de una circunferencia de alturas iguales con radio "r" y el polo de iluminación en GP, la posición geográfica del astro. Obviamente, la información disponible sobre nuestra posición hasta este momento es muy incompleta, pues podemos estar en cualquier lugar de la circunferencia de alturas iguales, que incluye un número infinito de posiciones posibles y es por ello por lo que se denomina un **círculo de posición** (véase el Capítulo 4).

Continuamos nuestro experimento mental observando un segundo astro a continuación del primero; lógicamente nos encontraremos entre dos circunferencias de alturas equidistantes. Ambas se cortan en dos puntos comunes sobre la superficie terrestre y solo uno de los puntos de intersección representa nuestra propia situación (Fig. 1-5a). Teóricamente, ambas circunferencias podrían también resultar tangentes entre sí, aunque esta circunstancia sea altamente improbable (véase Capítulo 16).



En principio, no es posible diferenciar cual de las dos posibilidades de corte representa nuestra posición verdadera, a no ser que dispongamos de alguna información adicional. Por ejemplo, si tenemos una posición estimada o una **demora** a alguno de los astros observados. El problema para esta **ambigüedad** puede resolverse también por observación de un tercer astro, porque las tres circunferencias de alturas iguales solo coincidirán en un solo punto (*Fig. 1-5b*).

Teóricamente podemos encontrar nuestra posición por representación grafica de las circunferencias de alturas iguales. Este método ha sido utilizado en el pasado, pero abandonado después por impracticable. Medidas precisas requieren un globo realmente demasiado grande. Representar circunferencias de alturas iguales sobre una carta sólo es posible si sus radios son suficientemente pequeños. Este método ha sido utilizado alguna vez en aquellas ocasiones en que la toma de alturas no ha sido fácil de medir. En la mayoría de los casos estas circunferencias de alturas iguales tienen diámetros de varios miles de millas náuticas y **no pueden representarse sobre cartas convencionales**. Además, representar circunferencias sobre una carta plana resulta muy difícil por las distorsiones geométricas a causa de la proyección cartográfica (Capítulo 13).

Desde el momento en que el marino dispone de una situación estimada ya no precisa de una representación grafica de la circunferencia de alturas iguales pero ha de situar sus componentes representativos cerca de la situación estimada.

Durante el siglo XIX^o, los ingeniosos navegantes desarrollaron métodos para crear líneas rectas (secantes y tangentes a las circunferencias de alturas iguales) cuyos puntos de intersección se aproximan mucho a la situación verdadera. Estos revolucionarios sistemas, que marcaron el inicio de la navegación astronómica moderna, serán explicados más adelante.

En resumen, encontrar una posición por observaciones astronómicas exige básicamente tres pasos:

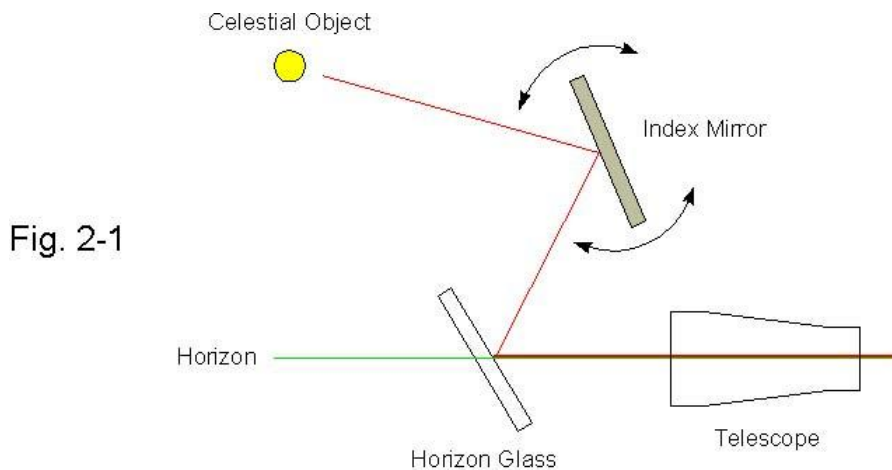
- 1 **Medir alturas o distancias cenitales de dos o más astros seleccionados (Capítulo 2).**
- 2 **Encontrar la posición geográfica de cada astro en el momento de su observación (Capítulo 3).**
- 3 **Calcular la posición mediante los datos anteriores (Capítulos 4 y 5).**

Medición de Alturas

Aunque las alturas y las distancias cenitales son igualmente adecuadas para efectuar los cálculos de navegación, la mayoría de las formulas están tradicionalmente basadas en las alturas, que son accesibles más fácilmente al usar el horizonte visible o de la mar como línea de referencia natural. Sin embargo, la medición directa de la distancia cenital requiere, un instrumento con un horizonte artificial, por ejemplo un péndulo o un nivel que indique la dirección de la fuerza de la gravedad (perpendicular al plano local del horizonte) desde un punto de referencia, que en el firmamento no existe.

Instrumentos

Un **sextante marino** consiste en un sistema de dos espejos y un anteojo o telescopio montado sobre una armadura metálica. En la Fig. 2-1 se muestra una representación esquemática vista lateralmente. El espejo pequeño o de horizonte, fijo sobre el armazón y perpendicular al plano del sextante es un espejo semitraslúcido y de superficie paralela a la línea de la alidada. El espejo grande, totalmente reflejante está montado en la alidada, con la superficie reflectante coincidiendo justo con el eje de giro. Para tomar la altura de un astro, el sextante se sujeta verticalmente con una mano y se dirige la mirada por el anteojo hacia la vertical del astro en el horizonte. Un rayo de luz procedente del astro observado se refleja, en primer lugar en el espejo grande y después en la superficie trasera del espejo pequeño antes de atravesar el anteojo. Mediante una suave rotación del espejo grande a lo largo de su eje, la imagen sobrepuesta del astro se alinea con la imagen del horizonte. La altura correspondiente es el doble que el ángulo formado por los planos de la lente de horizonte y el espejo grande y puede leerse directamente sobre la escala graduada del limbo, arco situado sobre el armazón del sextante (no incluido en la figura). Información detallada sobre el diseño, uso y mantenimiento de sextantes se describe en las citas bibliográficas [3] del Anexo.



En tierra, donde el horizonte es demasiado irregular para ser usado como línea de referencia, se han de medir las alturas mediante instrumentos que dispongan de un horizonte artificial.

Un **accesorio de burbuja** es un anteojo de sextante especial, que **incorpora un horizonte artificial** en forma de un pequeño nivel de burbuja, cuya imagen reemplaza al horizonte visible y se superpone con la imagen del astro. Estos accesorios suelen ser muy caros (cuestan casi tanto como el propio sextante) y no son muy precisos porque exigen que se mantenga el sextante totalmente firme durante la observación, lo cual resulta difícil de conseguir. Un sextante equipado con este tipo de accesorio se denomina **sextante de burbuja**. En la navegación aérea se usaron especiales sextantes de burbuja antes de que los sistemas electrónicos de navegación se convirtieran en el equipamiento habitual.

Una cápsula llena de agua o, preferiblemente llena de un líquido algo mas viscoso como, por ejemplo glicerina, puede ser utilizada como un **horizonte artificial externo**. A causa de la fuerza gravitatoria, la superficie del líquido forma un espejo horizontal perfecto, no distorsionable por las vibraciones de un motor o por el viento. La distancia angular vertical entre el astro y su imagen reflejada, medida con un sextante marino es 2 veces la altura. Este método, muy preciso es la perfecta forma para ejercitar navegación astronómica casera.

Un **teodolito** es básicamente un telescopio que puede girar sobre un eje vertical y también sobre uno horizontal. El ángulo de la altura se lee sobre un sector circular vertical y la dirección horizontal se lee sobre uno horizontal. Los niveles se usan para alinear el instrumento con el plano del horizonte sensible antes de comenzar a leer las observaciones (horizonte artificial). Los teodolitos se usaron inicialmente como instrumentos de supervivencia pero también resultan excelentes instrumentos de navegación. Muchos modelos pueden medir ángulos de $0,1'$, precisión que no se consigue con los mejores sextantes. Un teodolito se monta sobre un trípode y debe apoyarse sobre una base bien sólida. Por ello están limitados a mediciones de navegación en tierra firme. Habitualmente los teodolitos miden distancias cenitales aunque los modelos más modernos pueden medir opcionalmente también alturas.

¡Nunca debe observarse el Sol directamente a través de instrumentos ópticos sin insertar vidrios de protección adecuados, pues en otro caso la vista puede sufrir daños permanentes!

Corrección de Alturas

Toda medición de alturas realizada con sextante o con teodolito contiene errores. Las correcciones de alturas son necesarias para eliminar errores sistemáticos y para reducir las alturas relativas sobre el horizonte visible o sensible con respecto al horizonte celeste y al centro de la Tierra (Capítulo 1). La corrección de alturas no compensa los errores empíricos.

El Error de Índice (Ei)

Un sextante o un teodolito, aunque hayan sido calibrados recientemente, tienen un error constante (**desfase** o **error de índice, Ei**), cuya lectura ha de compensarse antes de poder utilizarse el instrumento para cálculos de navegación astronómica. El error de índice se sumará al ángulo medido si la alidada queda a la derecha de 0° y se restará si queda a la izquierda. Los errores variables, en función del ángulo medido, requieren una calibración del instrumento o el uso de una tabla de corrección individualizada.

$$1^a \text{ corrección : } H_1 = H_s - E_i$$

La **altura del sextante, Hs** es la lectura obtenida antes de aplicar ninguna corrección.

Si se utiliza un horizonte externo artificial, H_1 (¡no Hs!) se ha de dividir entre dos.

El teodolito mide la distancia cenital, z , lo cual requiere la fórmula siguiente para obtener H_1 :

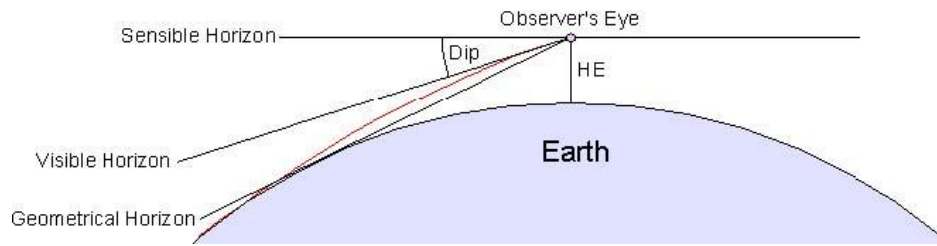
$$H_1 = 90^\circ - (z - E_i)$$

Depresión del Horizonte

Si la superficie de la tierra fuese un plano infinito, el horizonte visible y el sensible serían idénticos. En realidad, el horizonte visible aparece algunos minutos de arco por debajo del sensible a causa de dos efectos contrarios: la curvatura de la superficie terrestre y la refracción atmosférica. **El horizonte geométrico**, un cono muy plano está formado por un número infinito de líneas rectas, tangentes a la Tierra y trazadas desde la visual del observador. Mientras la refracción atmosférica implica curvar los rayos de luz hacia la superficie de la Tierra todos los puntos que forman el horizonte geométrico parecen estar elevados y forman el horizonte llamado visible, aparente o de la mar. Si la Tierra no tuviera atmósfera, el horizonte visible coincidiría con el geométrico (*Fig. 2-2*).

La altura del horizonte sensible con respecto al visible se denomina **depresión**, la cual es función de **la altura (HE)** a la que está el observador, es decir, representa la distancia vertical del observador a la superficie del Mar (o de la Tierra).

Fig. 2-2



$$DH ['] \approx 1.76 \cdot \sqrt{HE [m]} \approx 0.97 \cdot \sqrt{HE [ft]}$$

La fórmula anterior es empírica e incluye los efectos causados por la curvatura de la superficie terrestre y por la refracción atmosférica*.

*En la mar, la depresión del horizonte puede obtenerse directamente midiendo el ángulo vertical entre el horizonte visible delante y detrás del observador (con el cenit). Restando 180° al ángulo medido y dividiendo el ángulo resultante por dos, obtenemos la depresión del horizonte. Este método, muy exacto, sin embargo se usa pocas veces porque requiere la utilización de un instrumento de medición especial (parecido a un sextante).

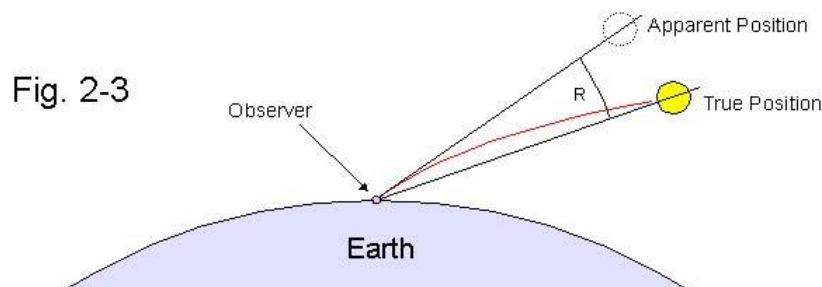
$$2^{\text{a}} \text{ corrección : } H_2 = H_1 - DH$$

La corrección por Depresión del Horizonte ha de omitirse (DH = 0) si se usan cualquier tipo de instrumentos con horizonte artificial, pues éste efectúa las mediciones en base al horizonte sensible.

La altura H_2 , obtenida después de aplicar las correcciones por error de índice y por depresión del horizonte se conoce como **altura aparente, Ha**.

La Refracción Atmosférica

Un rayo de luz procedente de un astro se desvía ligeramente hacia la Tierra cuando atraviesa oblicuamente la atmósfera. Este fenómeno se llama **refracción** y ocurre siempre que la luz atraviesa una materia de diferente densidad con un ángulo inferior a 90°. Debido a que la vista no puede detectar esta curva de desvío que sufre el rayo luminoso, el astro parece estar al final de una línea tangente al rayo luminoso que ve el observador y así parece estar más alto en el cielo. R es la distancia angular entre la posición verdadera del astro y la aparente, vista por el observador (Fig. 2-3).



La refracción es función de $H_a (= H_2)$. La **refracción atmosférica standard, R_0** , es 0' a 90° de altura y crece progresivamente hasta, aproximadamente unos 34' cuando la altura aparente se aproxima a 0°:

Ha [°]	0	1	2	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R₀ [']	~34	~24	~18	9.9	5.3	2.6	1.7	1.2	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0

R₀ puede calcularse de varias maneras como, por ejemplo, con la fórmula de *Smart*, que da resultados muy aproximados desde 15° hasta 90° de altura [2,9]:

$$R['] = \frac{0,97127}{\text{tang } H_2 [^\circ]} - \frac{0,00137}{\text{tang}^3 H_2 [^\circ]}$$

La fórmula de *Smart* es suficientemente exacta para su aplicación a la navegación y para alturas de 10°. Por debajo de 5°, el error se incrementa progresivamente. Para alturas entre 0° y 15° se recomienda aplicar la fórmula siguiente [10]. H₂ se expresa en grados:

$$R_0 ['] = \frac{34,133 + 4,197 \cdot H_2 + 0,00428 \cdot H_2^2}{1 + 0,505 \cdot H_2 + 0,0845 \cdot H_2^2}$$

Por *Benett* fue encontrada una fórmula de refracción con poca precisión pero que abarca el rango completo de alturas, entre 0° hasta 90°:

$$R_0 ['] = \frac{1}{\frac{\text{tang} [H_2[^\circ] + \frac{7,31}{H_2[^\circ] + 4,4}]}{H_2[^\circ] + 4,4}}$$

La exactitud es suficiente para el cálculo náutico. El máximo error sistemático, que se produce a alturas de 12°, es de aproximadamente 0.07' [2]. Si fuese necesario, la fórmula de *Bennett* puede mejorarse (error máximo: 0.015') mediante la corrección siguiente:

$$R_{0, \text{mejorado}} ['] = R_0 ['] - 0,06 \cdot \text{seno} (14,7 \cdot R_0 ['] + 13)$$

Para el argumento del seno han de tomarse grados [2].

La refracción queda influenciada por la presión atmosférica y la temperatura del aire. Si se necesita una gran precisión, para obtener la refracción correspondiente a una combinación dada de valores de presión y de temperatura debe multiplicarse la refracción Standard, R₀ por un factor de corrección, f.

$$f = [p[\text{mbar}] / 1010] \cdot [283/273 + T [^\circ\text{C}]] = [p["\text{de Hg}"] / 29,83] \cdot [510/460 + T [^\circ\text{F}]]$$

P es la presión atmosférica y T la temperatura del aire. Son **condiciones standard** (f = 1): **1.010 hecto Pascales** (1.010 mbar o 29,83 pulgadas) y **10° C** (50°F). La influencia de la humedad del aire es relativamente pequeña y puede ignorarse.

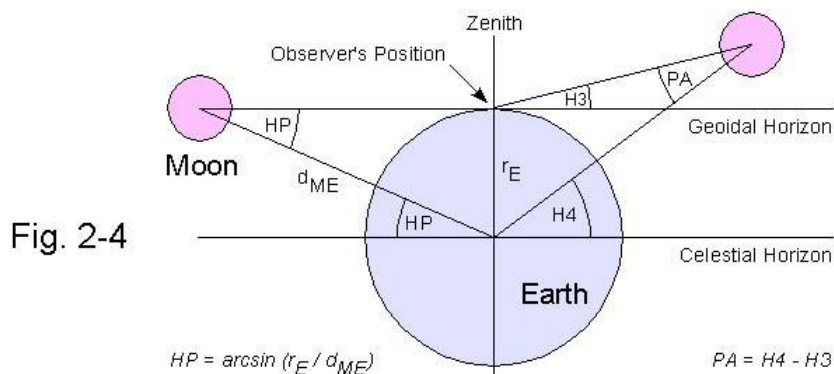
Las fórmulas de la refracción se refieren a condiciones atmosféricas standards y ficticias con el gradiente de densidad más probable. La refracción verdadera puede diferir de la calculada si se presentan condiciones atmosféricas anómalas (inversión de temperaturas, efectos ilusorios, etc.). Particularmente las anomalías atmosféricas ganan en influencia a latitudes bajas. Por ello, la refracción para alturas inferiores a 5° pueden volverse erráticas y sus valores calculados no siempre son reproducibles. Debería mencionarse que las depresiones del horizonte también quedan influenciadas por la refracción atmosférica y pueden volverse impredecibles bajo determinadas condiciones meteorológicas.

$$3^{\text{a}} \text{ corrección : } H_3 = H_2 - f \cdot R_0$$

dónde H_3 es la altura del astro con respecto al horizonte sensible.

La Paralaje

Los cálculos de navegación astronómica se refieren a las alturas medidas respecto al centro de la Tierra y al horizonte celeste. La Fig. 2-4 ilustra como la altura con respecto al horizonte celeste, H_4 , de un objeto cercano como, por ejemplo, la de la Luna, resulta manifiestamente más alto que la altura tomada con respecto al horizonte geoidal (sensible), H_3 . La diferencia entre $H_4 - H_3$ se llama **la paralaje de altura, PA**. Esta decrece al aumentar la distancia entre los objetos y la Tierra y es demasiado pequeña para ser medida cuando los astros observados son estrellas (véase Fig. 1-4 del Capítulo 1°). Teóricamente, la paralaje observada se refiere al horizonte sensible y no al geoidal. Cuando la altura de la visual es varias magnitudes inferior que el radio de la Tierra, los resultados del error por paralaje son insignificantes (<0,0003' para la Luna, a una altura de 30 m. de la visual del observador).



La paralaje en altura de un astro, obtenido sobre el horizonte geoidal se llama **paralaje horizontal, HP**. La HP del sol es aproximadamente 0,15'. La HP habitual de la Luna (casi ¡1°!) y la de los planetas más usuales para los cálculos de navegación se indican en el **Almanaque Náutico** [12] y en otras publicaciones similares [13]. La "PA" es función de la altura y la "HP" del astro de que se trate:

$$PA = \arccos(\sin HP \cdot \cos H_3) \approx HP \cdot \cos H_3$$

Según observemos el limbo superior o inferior de un astro (véase más adelante) asumimos que la paralaje del limbo corresponde a la paralaje del centro para la misma altura del astro. Por razones geométricas (curvatura de la superficie) esto no resulta totalmente correcto. Sin embargo, en el caso de la Luna, el astro que presenta con mucho la mayor paralaje, el error resultante es tan pequeño (<<1"), que puede ignorarse para todos los astros.

La fórmula anterior se cumple para una Tierra esférica. Sin embargo, la Tierra no es exactamente una esfera, sino un **esferoide oblicuo**, es decir una esfera achatada por los polos (Capítulo 9)*. Este hecho puede causar un pequeño, pero medible error ($\leq 0,2'$) en el paralaje de la Luna, dependiendo de la situación del observador [12]. Por ello, debería añadirse una pequeña corrección, ΔPA si se requiere mucha precisión:

$$\Delta PA \approx f \cdot HP \cdot \left[\sin(2 \cdot Lat) \cdot \cos Az_N \cdot \sin H_3 - \sin^2 Lat \cdot \cos H_3 \right] \quad f = 1/298,257$$

$$PA_{Mejorada} = PA + \Delta PA$$

*Valores tabulados para HP, referidos al radio ecuatorial de la Tierra (Paralaje Horizontal Ecuatorial, PHE).

dónde **Lat** es la latitud estimada del observador (Capítulo 4), **Az_N** el azimut de la Luna, también medido con el compás (demora de aguja) o calculado mediante las fórmulas descritas en el Capítulo 4.

$$4^{\text{a}} \text{ corrección : } H_4 = H_3 + PA$$

El Semidiámetro

Cuando observamos el Sol o la Luna con un sextante náutico o un teodolito, no nos es posible localizar el centro del astro con suficiente exactitud. Por ello es práctica común medir la altura del limbo superior o inferior del astro y sumar o restar el **semidiámetro aparente, SD**, la distancia angular del limbo respectivo, desde el centro del astro (Fig. 2-5).

Corregimos el **SD geocéntrico**, medido por un observador ficticio situado en el centro de la Tierra, cuando H₄ se refiere al horizonte celeste y al centro de la Tierra (véase Fig. 2-4). El semidiámetro geocéntrico del sol y de la Luna se indica en las páginas diarias del **Almanaque náutico** [12]. También podemos calcular el SD geocéntrico de la Luna mediante la paralaje horizontal tabulado:

$$SD_{geocéntrico} = \arcsen (k \cdot \sen HP) \approx k \cdot HP \quad k_{Luna} = 0.2725$$

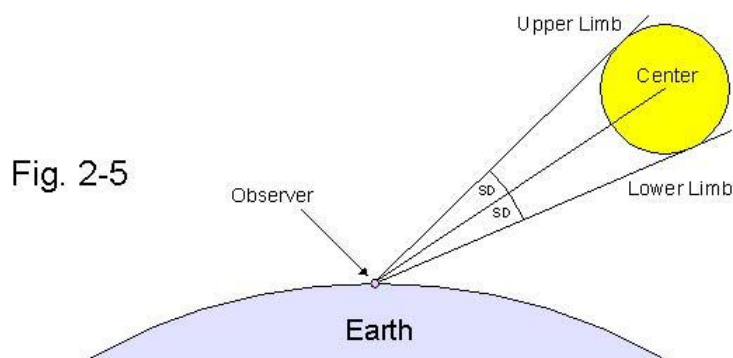


Fig. 2-5

El factor “k” representa la relación entre el radio de la Luna (1.738 km) y el radio ecuatorial de la Tierra (6.378 km).

Aunque los semidiámetros de los planetas, usados en los cálculos de navegación no son del todo despreciables (el SD del planeta Venus puede aumentar hasta 0,5’), se observa habitualmente el centro de estos astros y, en consecuencia, no se aplica la corrección por semidiámetro. Los semidiámetros de las estrellas son demasiado pequeños para poderse medir (SD=0).

$$5^{\text{a}} \text{ corrección : } H_5 = H_4 \pm SD_{geocéntrico}$$

(limbo inferior: +SD; limbo superior: -SD)

Cuando se usa un sextante con burbuja de nivel que, en cualquier caso resulta menos preciso, observamos el centro del astro y nos saltamos la corrección por semidiámetro.

Las alturas obtenidas tras la aplicación de las correcciones descritas anteriormente se denominan **alturas observadas, Ho**.

$$Ho = H_5$$

“Ho” es la altura geocéntrica del astro, la altura con respecto al horizonte celeste y al centro de la Tierra (véase el Capítulo 1).

Correcciones Alternativas para Semidiámetros y Paralajes

El orden para las correcciones de altura descritas anteriormente está establecido de acuerdo con el del Almanaque Náutico. Como alternativa, se puede corregir por semidiámetro **antes** de corregir la paralaje. En este caso, sin embargo, debemos calcular con el semidiámetro topocéntrico, entre el astro respectivo, visto desde la posición del observador sobre la superficie de la Tierra (véase Fig. 2-5), en vez del semidiámetro geocéntrico.

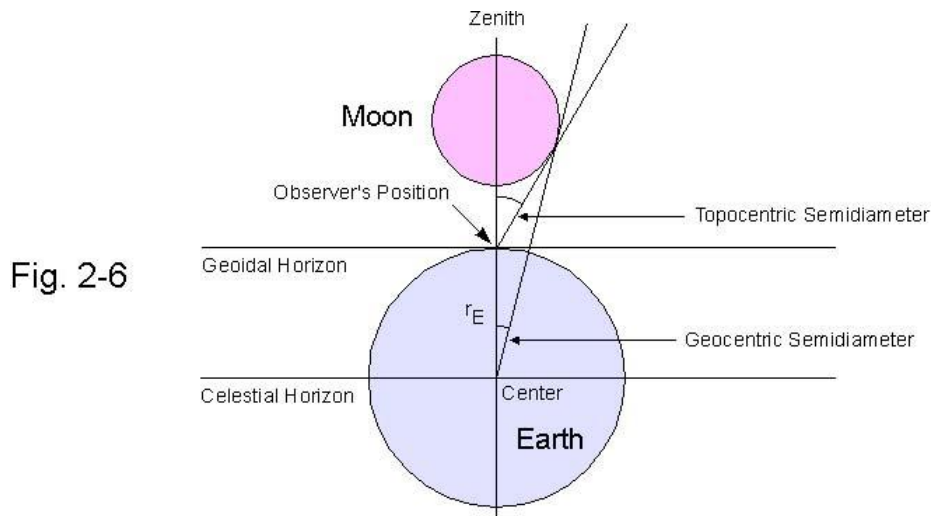
Con excepción de la Luna, el astro más cercano a la Tierra, no hay una diferencia manifiesta entre el SD topocéntrico y el geocéntrico. El SD topocéntrico de la Luna solo es marginalmente mayor que el SD geocéntrico cuando aquella se encuentra sobre el horizonte sensible, pero se incrementa de forma considerable cuando aumenta la altura debido a la decreciente distancia entre la Luna y el observador. La distancia es mínima cuando la Luna se sitúa en el Cenit (a causa del menor radio de la Tierra). Como consecuencia, el SD topocéntrico de la Luna en el Cenit es aproximadamente 0,3' mayor que el SD geocéntrico. Este fenómeno se denomina **“aumento”** (Fig. 2-6).

Se considera la fórmula más exacta para calcular el semidiámetro topocéntrico (aumentado) de la Luna:

$$SD_{\text{topocéntrico}} = \text{arcotang } k / \sqrt{1 - \cos(H_3 \pm k)^2 - \text{sen } H_3 + 1/\text{sen}^2 HP}$$

(Observación del limbo inferior: +k, observación del limbo superior: -k)

Esta fórmula se cumple considerando la Tierra esférica. El error causado por el achatamiento de los polos es demasiado pequeño como para ser medible.



La siguiente fórmula fue propuesta por *Meeus* [2]. Ignora la diferencia entre limbo inferior y superior pero se mantiene suficientemente exacta para cálculos náuticos (error <1''):

$$SD_{\text{topocéntrico}} = k \cdot HP \cdot (1 + \text{sen } HP \cdot \text{sen } H_3)$$

Una aproximación similar fué propuesta por Stark [14]:

$$SD_{\text{topocéntrico}} = k \cdot HP / (1 - \text{sen } HP \cdot \text{sen } H_3)$$

Luego la cuarta corrección consiste en:

$$4^{\text{a}} \text{ corrección (altura): } H_{4, \text{alt}} = H_3 \pm SD_{\text{topocèntrico}}$$

(limbo inferior: +SD; limbo superior: -SD)

$H_{4, \text{alt}}$ es la altura topocèntrica del centro de la esfera lunar.

Usando las fórmulas de paralaje citadas arriba, se calcula PA_{alt} con $H_{4, \text{alt}}$. En consecuencia la 5ª corrección es:

$$5^{\text{a}} \text{ corrección (altura) : } H_{5, \text{alt}} = H_{4, \text{alt}} + PA_{\text{alt}}$$

$$H_o = H_{5, \text{alt}}$$

Cuando el SD geocèntrico es más fácil de calcular que el SD topocèntrico, generalmente es recomendable corregir por el semidiámetro en el último momento, salvo que se tenga que conocer el SD aumentado para la Luna por razones especiales.

Correcciones Combinadas por Semidiámetro y Paralaje para la Luna.

Para las observaciones de la Luna, sorprendentemente hay fórmulas muy simples que incluyen las correcciones de la altura tanto por **semidiámetro** como para la **paralaje**:

$$H_o = H_3 + \text{arcosen} \left[\text{sen } HP \cdot (\cos H_3 \pm k) \right]$$

(observación del limbo inferior: +k, observación del limbo superior: -k)

Esta fórmula se cumple considerando la Tierra esférica, pero no tiene en cuenta el efecto del achatamiento en los polos. En consecuencia, la pequeña corrección de ΔPA debería añadirse a H_o .

Para completar el cuadro, debe mencionarse que también hay una fórmula para calcular el semidiámetro topocèntrico (aumentado) de la Luna por la altura geocèntrica de su centro, H:

$$SD_{\text{topocèntrico}} = \text{arcoseno } k / \sqrt{1 + 1/\text{sen}^2 HP - 2 \cdot \text{seno } H / \text{seno } HP}$$

También esta fórmula está basada en el modelo esférico de la Tierra.

Corrección de Fases (Venus y Marte)

Como los planetas Venus y Marte muestran fases similares a las de la Luna, su centro aparente puede variar algo del centro observado. Las coordenadas de ambos planetas, tabuladas en el **Almanaque Náutico** [12] se refieren, sin embargo, al centro aparente y no se precisa una corrección adicional. La corrección de las fases para Júpiter y Saturno es demasiado pequeña para ser relevante.

En cambio, las coordenadas calculadas con **Efemérides Interactivas Electrónicas** se refieren al centro del observado. En estos casos el limbo superior o inferior de los planetas respectivos sí que deberían tenerse en cuenta, siempre que el aumento del telescopio sea suficiente.

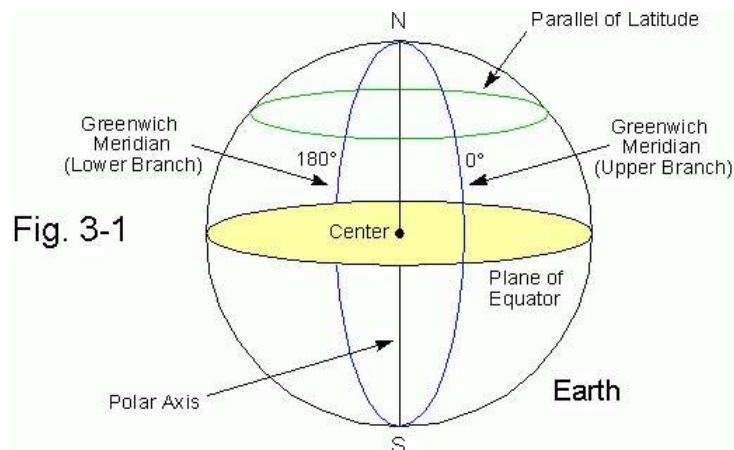
El Almanaque Náutico incluye tablas para las correcciones de alturas sextantales para el Sol, los planetas, estrellas y la Luna, que pueden usarse en vez de las fórmulas anteriores, si no se requiere una gran precisión (las tablas contienen errores adicionales de redondeo).

Los instrumentos con un horizonte artificial también pueden aportar errores adicionales a causa de las fuerzas de inercia que actúan sobre la burbuja o los péndulos, separándolas de la alineación propia de la dirección de la gravedad. Tales fuerzas pueden ser anárquicas (movimientos de barcos) o bien sistemáticas (fuerzas de Coriolis). Las fuerzas de Coriolis son importantes en la navegación aérea y requieren una fórmula especial de corrección. Cerca de montañas o depósitos y de otras irregularidades locales sobre la superficie terrestre, incluso la propia fuerza de la gravedad, pueden desviar ligeramente la referencia de su posición normal al elipsoide terrestre (deflexión de la vertical, véase el Capítulo 9).

La Posición Geográfica y el Horario

Términos y Expresiones Geográficas

En Navegación Astronómica se contempla la Tierra como una esfera. Aunque se trate solo de una aproximación, la geometría esférica es perfectamente aplicable y los errores debidos al achatamiento de la esfera terrestre son habitualmente irrelevantes (capítulo 9). El círculo sobre la superficie de la Tierra, cuyo plano pasa por el centro de la misma se llama **círculo máximo** y presenta el mayor diámetro posible de todos los círculos que atraviesan la superficie de la Tierra. Aquellos círculos cuyos **planos no** pasan por el centro de la Tierra, se llaman **círculos menores**. El **ecuador** es el único círculo máximo cuyo plano es perpendicular al **eje de los polos**, el eje de rotación de la Tierra. Además, el ecuador es el único paralelo de latitud que es círculo máximo. Todos los demás **paralelos de latitud** son círculos menores, cuyos planos son paralelos al plano del ecuador. Un **meridiano** es un círculo máximo comprendido entre los **polos geográficos**, aquellos puntos en que el eje polar corta la superficie de la Tierra. El **meridiano superior** es la mitad del meridiano que, de polo a polo, pasa por la situación del observador. El **meridiano inferior** es la mitad opuesta. El **meridiano de Greenwich**, que pasa por el centro del **Real Observatorio de Greenwich**, ha sido adoptado como **primer meridiano** durante la Conferencia Internacional del Meridiano en 1884. Su meridiano superior es la referencia para la medición de longitudes (0°) y su meridiano inferior (180°) representa la línea del **cambio internacional de fechas** (Fig. 3-1).



Cada punto de la superficie terrestre tiene su correspondiente posición imaginaria sobre la superficie de la esfera celeste por proyección geocéntrica, es decir, desde el centro geométrico de la Tierra. La imagen proyectada de la posición del observador, por ejemplo, se llama cenit. De acuerdo con esto, existen **dos polos celestes**, el **Ecuador celeste**, **meridianos celestes**, etc.

El Sistema Ecuatorial de Coordenadas

La **posición geográfica de un cuerpo celeste, GP**, se define por el **sistema ecuatorial de coordenadas** (Fig. 3-2). El **ángulo horario de Greenwich, GHA**, es el arco de paralelo, medido siempre **hacia el oeste** entre $0^\circ - 360^\circ$, desde el meridiano superior de Greenwich (0°) hasta GP. **La declinación, DEC**, es el arco de meridiano medido desde el plano del Ecuador hasta GP = $+90^\circ$ hacia el Norte y -90° hacia el Sur. GHA y la declinación son **coordenadas geocéntricas** (medidas desde el centro de la Tierra). El círculo máximo que atraviesa los polos y pasa por GP se llama **círculo horario** (Fig. 3-2). Declinación y GHA son, respectivamente equivalentes a la latitud y longitud geocéntrica, con la única excepción de que la **Longitud se mide -180° hacia el Oeste y $+180^\circ$ hacia el Este**.

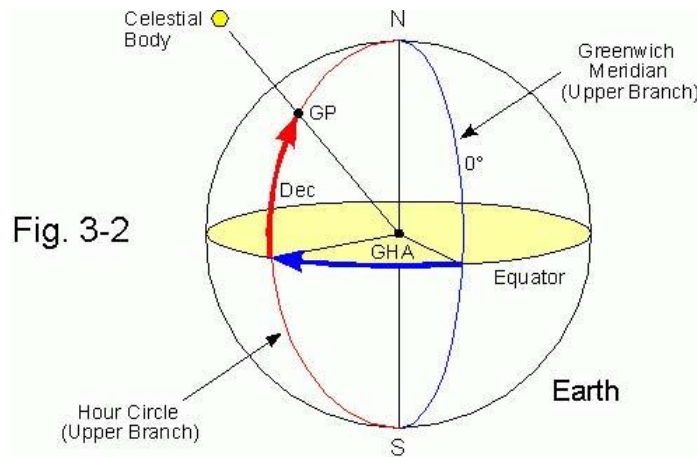


Fig. 3-2

Debido a que el meridiano de Greenwich gira con la Tierra de oeste a este, y en cambio, cada círculo horario se mantiene fijo, manteniendo la posición prácticamente estacionaria correspondiente a cada astro en el firmamento, es por lo que los ángulos horarios de todos los astros celestes aumentan aproximadamente 15° por hora (360° en 24 horas). En contraste con las estrellas ($15^\circ 2,46'/h$), el ángulo horario en Greenwich, GHA del Sol, la Luna y de los planetas aumenta en fracciones ligeramente diferentes (y variables). Este fenómeno se debe al giro de los planetas (incluida la propia Tierra) alrededor del Sol y en el caso de la Luna, a su giro alrededor de la Tierra y que introducen un movimiento aparente adicional de estos astros en el firmamento. En muchos casos resulta adecuado medir la distancia angular entre el círculo horario de un astro y el del punto de referencia sobre la esfera celeste, en vez de tomar como tal al meridiano de Greenwich porque el ángulo así obtenido es independiente de la rotación de la Tierra. El ángulo sidéreo, SHA, es la distancia angular de un astro al círculo horario (meridiano superior) del primer punto de Aries (también llamado equinoccio de primavera; véase más adelante), medido hacia el oeste entre 0° y 360° . Por lo tanto, el GHA del astro es la suma de su SHA y el GHA_{Aries} , que a su vez es el GHA del primer punto de Aries:

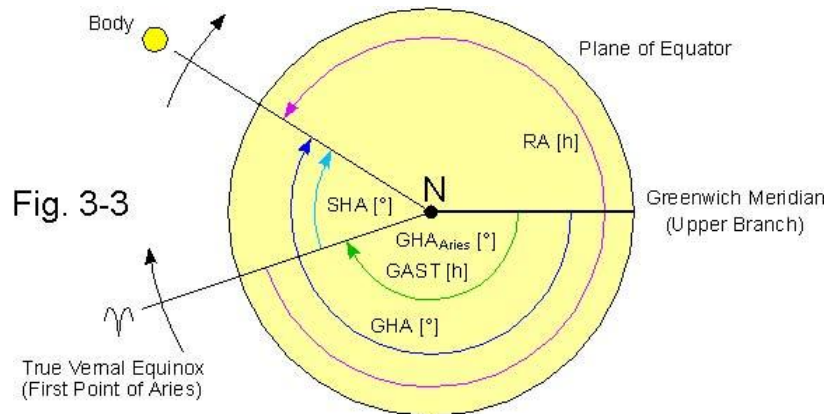
$$GHA = SHA + GHA_{Aries}$$

(Si el GHA resultante es superior a 360° , se le restan 360°)

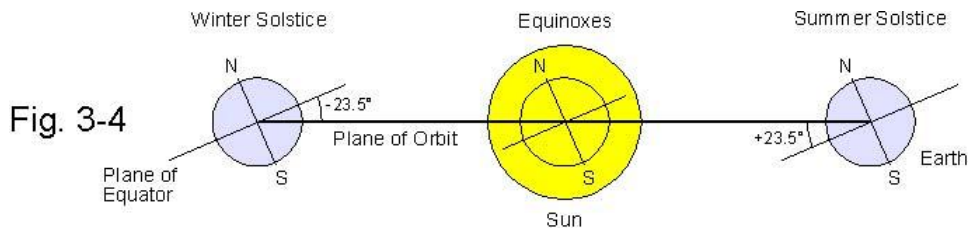
A la distancia angular de un astro, contada hacia el este desde el círculo horario del equinoccio de primavera y medida en unidades de tiempo ($24h = 360^\circ$), se le llama Ascensión Recta, RA. La ascensión recta se usa principalmente por los astrónomos, mientras que los navegantes suelen preferir el ángulo sidéreo, SHA.

$$RA[h] = 24 h - SHA [^\circ] / 15 \Leftrightarrow SHA [^\circ] = 360^\circ - 15 \cdot RA [h]$$

Fig. 3-3: Ilustra cómo están interrelacionados los diferentes ángulos horarios.

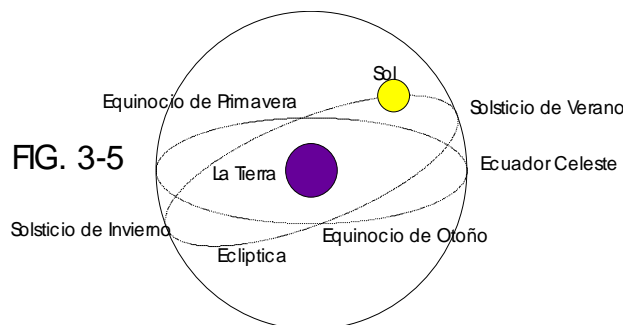


Las declinaciones no quedan afectadas por la rotación de la Tierra. Las declinaciones del sol y los planetas cambian principalmente por la **oblicuidad de la eclíptica**, es decir, a causa de la inclinación del ecuador terrestre con respecto a la **eclíptica**. Finalmente, influye el plano orbital de la Tierra, formando un círculo máximo sobre la esfera celeste. La declinación del sol, por ejemplo, varía periódicamente entre $+23,5^\circ$ desde el solsticio de verano, hasta $-23,5^\circ$ en el solsticio de invierno (fig. 3-4).



Los dos puntos de la esfera celeste donde el círculo máximo de la eclíptica cruza el ecuador celeste, se denominan **equinoccios**. El término “equinoccio” también se usa para definir el tiempo en que el sol aparente, moviéndose hacia el este sobre la eclíptica, pasa por cada uno de estos puntos, aproximadamente el 21 de marzo y el 23 de septiembre de cada año. Según este criterio, el primero representa el equinoccio de primavera y el segundo, el de otoño. Se trata de la referencia para medir ángulos sidéreos (Fig. 3-5).

Cuando el Sol pasa por alguno de los equinoccios (Dec = 0), el día y la noche tienen aproximadamente la misma duración, independientemente de la posición del observador (Lat. *Aequae noctes* = noches iguales).



Las declinaciones de los planetas y de la Luna también están influenciadas por la inclinación de sus respectivas órbitas con respecto a la eclíptica. Por ejemplo, el plano de la órbita lunar está inclinado aproximadamente 5° en relación con la eclíptica, describiendo un movimiento de precesión con un ciclo de 18,6 años (el ciclo de Saros). En consecuencia, la declinación de la Luna varía entre, aproximadamente $-28,5^\circ$ y $+28,5^\circ$ al inicio y al final del ciclo de Saros, mientras que en su momento central varía sólo entre $-18,5^\circ$ y $+18,5^\circ$.

Además, los ángulos horarios del tiempo sidéreo y las declinaciones de todos los astros cambian ligeramente debido al movimiento de **precesión** del eje polar de la Tierra. Se trata de un ligero desplazamiento del eje que pasa por los polos a lo largo de la superficie imaginaria de un doble cono invertido. Una revolución se completa en unos 26.000 años (año Platónico). En consecuencia, los equinoccios se desplazan unos $50''$ anuales hacia el oeste a lo largo del ecuador celeste y, por lo tanto, el ángulo sidéreo de las estrellas decrece alrededor de este rango. El eje de giro polar de la Tierra realiza además una pequeña oscilación elíptica, llamada **movimiento de nutación**, que produce un pequeño desplazamiento de los equinoccios a lo largo del ecuador celeste con un rango de periodicidad variable y por el cual hemos de distinguir entre **la fecha equinoccial media aparente** y **la fecha del equinoccio verdadero** (véase el apartado sobre la Medida del Tiempo). En consecuencia, la declinación de cada astro también varía y todo ello ha de aplicarse también al rango variable del ángulo sidéreo y de la ascensión recta.

Las estrellas no están fijas en el espacio, sino que todas muestran cierto movimiento individual que conduce a un ligero desplazamiento de sus coordenadas ecuatoriales (**movimiento propio**). Finalmente, la posición aparente de los astros está influenciada por el límite de la velocidad de la luz (**aberración**) y en una pequeña extensión por su paralaje anual [16]. La predicción exacta de la posición geográfica de los astros en el firmamento precisa de complicados algoritmos. En el capítulo 15 se indican las fórmulas necesarias para el cálculo de las efemérides aproximadas del sol (aunque sus valores resultan suficientemente exactos para los cálculos de navegación astronómica).

La Medida del Tiempo en Navegación y Astronomía

Debido al rápido transcurso del ángulo horario de Greenwich, la navegación astronómica requiere una medición muy precisa del tiempo y el instante de la observación ha de poderse anotar con precisión de segundos siempre que ello sea posible. Esto se consigue habitualmente con el uso de un reloj y de un cronómetro bloqueable. Los efectos producidos por los errores en la medición del tiempo se consideran en el Capítulo 16. Por otro lado, la rotación de la Tierra con respecto a los astros aporta una base muy importante para la medida del tiempo astronómico.

Las coordenadas tabuladas en el **Almanaque Náutico** se refieren al **Tiempo Universal, UT**. El término de Tiempo Universal ha sustituido al de **Tiempo Medio en Greenwich, GMT** que fue la base tradicional de referencia para el Horario Civil. Conceptualmente, UT (igual que GMT) representa el ángulo horario del **Sol Medio Aparente** expresado en horas y con respecto al **Meridiano Inferior** de Greenwich (Tiempo Solar Medio, Fig. 3-6).

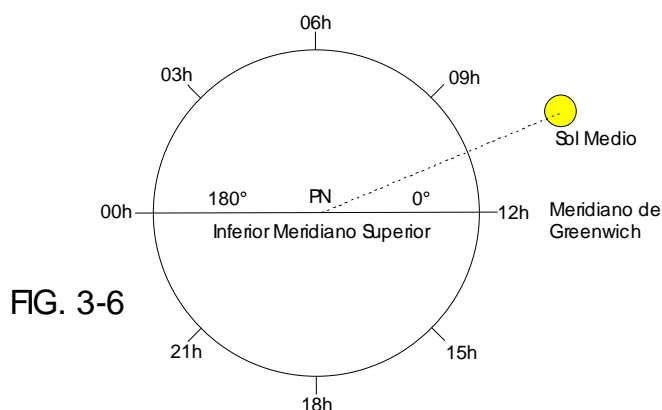


FIG. 3-6

El Tiempo Universal UT, se calcula mediante la fórmula:

$$UT [h] = GMT [h] = 12 + GHA_{Sol\ medio} [^\circ] / 15$$

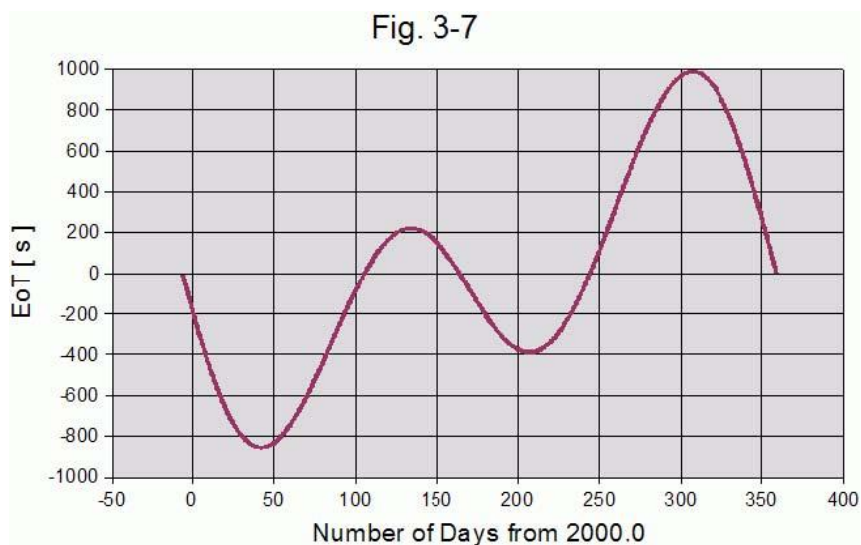
(Si UT resulta superior a 24h, se le restan 24 horas)

Por definición, el GHA del sol medio aumenta exactamente 15° por hora, completando 360° en un ciclo de 24 horas. La unidad para UT (y también para GMT) es 1 día solar medio: el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del sol medio por el mismo meridiano.

El rango de cambio para el horario GHA del **sol aparente (observable)** varía periódicamente y a veces resulta un poco mayor, otras algo menor que 15° por hora durante el transcurso de un año. Este fenómeno se debe a la excentricidad de la órbita terrestre y por la oblicuidad de la eclíptica. El tiempo medido para el ángulo horario recorrido por el sol aparente desde al meridiano inferior de Greenwich se denomina **Tiempo Aparente en Greenwich (GAT)**. Un diagrama solar calibrado y situado, por ejemplo, sobre el meridiano de Greenwich, mediría el GAT. La diferencia entre GAT y UT (GMT) se llama “**Ecuación del Tiempo**”, **EoT**:

$$EoT = GAT - UT$$

EoT varía periódicamente entre, aproximadamente -14 y +17 minutos (*Fig. 3-7*). En el Almanaque Náutico se predicen los valores diarios para EoT durante el año (a UT 00:00 y 12:00). El fondo gris indica EoT's negativos. Se precisa de la EoT cuando se calcula el horario del orto y del ocaso, o bien al determinar una **longitud al mediodía** (véase el capítulo 6). Las fórmulas necesarias para el cálculo de EoT se indican en el capítulo 15.



El ángulo horario del sol medio respecto al meridiano inferior del lugar (el meridiano que pasa por la posición del observador) se denomina **Tiempo Medio Local, LMT**. LMT y UT están relacionados por la fórmula siguiente:

$$LMT [h] = UT [h] + Lon[^\circ] / 15$$

El instante en que el Sol Medio pasa por el meridiano del lugar (Meridiano superior) se llama **Mediodía Local, LMN**.

El horario de una **zona horaria (huso)** es el tiempo medio local en relación con una Longitud múltiplo de 15°. Por lo tanto, los Husos Horarios difieren entre si en un número entero de horas. Por ejemplo, en los EE.UU, el Horario Standard para los Estados del Este (EST = UT-5h) es LMT a -75° de Longitud; el Horario Standard para los Estados del Pacífico (PST = UT-8h) es LMT a -120° de Longitud. El Horario Medio Centroeuropeo (MEZ o CET = UT+1h) es LMT a +15° de Longitud.

El ángulo horario del sol aparente con respecto al meridiano inferior del lugar se llama **Horario Local Aparente (LAT)**:

$$LAT [h] = GAT [h] + Lon[^{\circ}] / 15$$

El instante en que el sol aparente cruza el meridiano superior del lugar se llama **Mediodía Aparente del Lugar (LAN)**.

La medida del tiempo por rotación de la Tierra no necesariamente precisa al sol como punto de referencia en el firmamento. El **Horario Sidéreo Aparente en Greenwich, GAST**, es una escala de Tiempo basada en el ángulo horario de Greenwich (meridiano superior) del equinoccio verdadero de primavera con la fecha de GHA_{Aries} (véase Fig. 3-3).

$$GAST [h] = GHA_{Aries} [^{\circ}] / 15$$

Los valores de GHA_{Aries} están tabulados en el Almanaque Náutico y se refieren a la fecha correspondiente al equinoccio verdadero.

El Horario Sidéreo Aparente en Greenwich (GAST) se calcula fácilmente por el tránsito de las estrellas por el Meridiano de Greenwich. En este instante, el GAST coincide numéricamente con la ascensión recta de la estrella observada.

El ángulo horario en Greenwich del día imaginario del equinoccio medio de primavera (movimiento a lo largo del ecuador celeste con un rango constante) define el **Horario Sidéreo Medio de Greenwich (GMST)**. Las desviaciones de GMST se llaman **ecuación de los equinoccios, EQ** o bien, **nutación de la ascensión recta**. EQ puede predecirse con exactitud. Varía aproximadamente entre $\pm 1''$.

$$EQ = GAST - GMST$$

GMST resulta de gran importancia al ser la actual base para UT. Como la medida del tiempo efectuada por cálculo del paso del sol a través de los meridianos no es suficientemente exacta para muchas aplicaciones científicas, se calcula UT por definición a partir de GMST. Ello es posible gracias a que existe una correlación cerrada entre GMST y el horario solar medio en Greenwich. El horario así obtenido se llama **UT₀**. Aplicando una pequeña corrección (milisegundos) por los efectos del **movimiento polar** (un movimiento casi circular de la superficie terrestre con respecto al eje de rotación), se obtiene **UT₁**, llamado comúnmente **UT**.

Debido a que la rotación de la Tierra durante su trayectoria alrededor del sol, un día sidéreo medio (el intervalo de tiempo entre dos tránsitos consecutivos por el meridiano del equinoccio medio) es ligeramente más corta que un día solar medio:

$$24\text{h Horario Sidéreo Medio} = 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4,090524^{\text{s}} \text{ de horario solar medio}$$

En analogía con LMT y LAT, podemos definir un **Horario Sidéreo Local Medio (LMST)** y un **Horario Sidéreo Local Aparente (LAST)**:

$$LMST [h] = GMST [h] + Lon[^{\circ}] / 15 ; LAST [h] = GAST [h] + Lon[^{\circ}] / 15$$

El horario solar y el sidéreo están ambos ligados a la rotación de la Tierra. Sin embargo, la velocidad de rotación de la Tierra decrece lentamente (fricción de las mareas) y además fluctúa de una manera impredecible por movimientos anárquicos, tanto de la materia en el interior del globo terrestre (magma) como también de su superficie (agua y aire). Por ello ninguna de ambas escalas horarias es estrictamente uniforme. Sin embargo, muchas aplicaciones astronómicas requieren una escala lineal para medir el transcurso del tiempo. Un ejemplo es el cálculo de las efemérides donde los movimientos de los astros en el espacio son independientes de la rotación de la Tierra.

El **Horario Atómico Internacional (TAI)** es el horario Standard más preciso disponible en la actualidad. Se obtiene por análisis y tratamiento estadístico de todos los datos suministrados por un gran número de relojes atómicos de todo el mundo. Aparte de otras, se derivan dos importantes escalas horarias del TAI:

Hoy en día nuestra vida civil se rige principalmente por el Horario **Universal Coordinado (UTC)**, que es la base para las señales horarias emitidas por las estaciones de radio. Por ejemplo, WWW o WWVH. UTC está controlado por TAI. Debido a la variación de la velocidad rotacional de la Tierra, UT tiende a alejarse de UTC. Esto no resulta deseable ya que el ciclo de día y noche está ligado a UT. Por ello, UTC se sincroniza con UT, si fuese necesario, por inserción (u omisión) de segundos correctores en determinados momentos (el 30 de junio y el 31 de diciembre) de acuerdo con la necesidades de correlación, cuando la diferencia, ΔUT excede a la especificada como máximo valor admisible, de $\pm 0,9''$.

$$UT = UTC + \Delta UT$$

$$UTC = TAI - N$$

N es el número acumulado de segundos correctores insertados hasta ahora ($N= 32$ en 2004,0). Debido a la corrección ocasional de segundos correctores, **UTC no es una escala continua** y lineal del tiempo! Se publican semanalmente los valores previsible para $\Delta UT (=UT-UTC)$ en **IERS Rapid Service** [15] en su IERS Bulletin A. También predice IERS la inserción (u omisión) de segundos de corrección previstas para el futuro, en IERS Bulletin A+C.

El **Horario Terrestre (TT)** llamado habitualmente **Horario Dinámico Terrestre (TDT)** es otro horario derivado de TAI:

$$TT = TAI + 32,184^s$$

TT ha reemplazado el **Horario Efemérico ET**. Es necesario introducir la corrección de $32,184''$ a TAI para asegurar una continuación semejante a ET. TT se usa en astronomía (cálculo de efemérides) y en navegación espacial. La diferencia entre TT y UT se describe como

$$\Delta T = TT - UT$$

Al comienzo del año 2006, el $\Delta T = +64,9^s$. El ΔT también es muy importante para los programas computerizados de almanaques, que requieren los datos TT (TDT) como argumentos de Horarios (programas que usan UT's calculados en base a valores extrapolados de ΔT). Es imposible obtener una predicción precisa de ΔT a largo plazo. Por ello, los almanaques computerizados que solo usan UT como argumento para horarios pueden resultar faltos de exactitud a largo plazo. Pueden calcularse valores de ΔT para una predicción cercana con la fórmula siguiente:

$$\Delta T = 32,184^s + (TAI - UTC) - (UT1 - UTC)$$

Al igual que $UT1 - UTC$, los valores de $TAI - UTC$ (número acumulado de segundos correctores) se publica en el IERS Bulletin A.

Observación final sobre GMT:

El término GMT se ha convertido en ambiguo a pesar de que se utiliza ahora frecuentemente como sinónimo de UTC. Sin embargo los astrónomos han utilizado el cálculo de GMT del Meridiano superior de Greenwich hasta 1925 (el horario así obtenido se llama frecuentemente Horario Astronómico Medio en Greenwich, GMAT). Por ello, el término GMT debería obviarse en publicaciones científicas, excepto cuando se use en un contexto histórico.

El Almanaque Náutico

En las páginas diarias del **Almanaque Náutico (N.A.)** y en publicaciones similares [12, 13], se encuentra la predicción tabulada de los valores para GHA y Declinación del Sol, la Luna y los planetas más usados en navegación para cada hora UT entera de todo un año. También los valores de GHA_{Aries} se encuentran aquí tabulados de la misma manera.

Requeriría demasiado espacio disponer de un listado completo de GHA y Declinaciones para cada hora UT entera de cada día del año, correspondientes a cada una de las 57 estrellas “fijas”, que se suelen usar en navegación. Como las declinaciones y los ángulos sidéreos de las estrellas solo cambian muy lentamente, los valores tabulados para periodos de 30 días resultan suficientemente exactos para resolver satisfactoriamente todos los cálculos de navegación.

La corrección anual necesaria para fijar las fracciones de GHA y Declinación por cada minuto y segundo de hora se encuentra en las **tablas de interpolación**, situadas al final del Anuario. Se procede de la siguiente forma:

1.

Anotamos cuidadosamente para cada astro el horario de observación (UT), mediante un cronómetro. Si UT no está disponible, podemos usar UTC. En la mayoría de los casos, es tolerable el error resultante.

2.

A continuación, consultamos la página del Anuario, correspondiente al año y al día de la observación.

3.

Anotamos GHA y la declinación del astro observado para la hora entera más cercana, que preceda a la que hayamos realizado la observación. En caso de tratarse de una estrella, hallamos la suma de GHA_{Aries} y de su ángulo sidéreo y anotamos su declinación tabulada. Si observamos un planeta, anotamos los **factores de corrección “v” y “δ”** indicados para la columna correspondiente. En el caso de observar la Luna, leemos “v” y “δ” para la hora entera más cercana, que preceda a la observación.

El valor “v” es necesario para aplicar una corrección adicional a la siguiente interpolación del valor GHA de la Luna y de los planetas. En cambio, no se precisa en el caso de las estrellas. El Sol tampoco requiere el factor de corrección “v” pues se encuentra ya incorporado en los valores tabulados para el GHA del Sol.

El valor “δ”, que es insignificante para las estrellas, representa el intervalo de corrección de la declinación, medido en minutos de arco por hora. Se precisa para la interpolación de la declinación. ¡El signo de “δ” es crítico!

4.

Observamos ahora el minuto al que se hizo la observación en las tablas de interpolación (2 minutos de hora entera por cada página) y leemos el incremento para la columna en cuestión en la línea del segundo observado.

Aquí mismo entramos en la columna derecha de “Dif” para leer la corrección de los valores “ v ” y “ δ ”. El signo de “ δ ” depende de la declinación en el momento de la observación. Es positivo si la declinación a la hora entera siguiente a la observación es superior que la declinación a la hora precedente a la observación. En otro caso es negativo. La corrección “ v ” es negativa para Venus. En los demás casos es siempre positiva.

5.

Sumamos algebraicamente la declinación y el valor de “ δ -corr” (si es aplicable).

Sumamos GHA (o GHA_{Aries} y SHA de la estrella) y “ v -corr” (si es aplicable).

Los valores para el ángulo sidéreo SHA tabulados en el Almanaque Náutico se refieren a la fecha del equinoccio verdadero de primavera.

Efemérides Interactiva Electrónica

Se trata de un programa de **Almanaque Náutico de Efemérides interactivas llamado “ICE”**, desarrollado por el Observatorio Naval de los EEUU (USNO), como sustituto del llamado **“Almanaque en disco portátil”**.

“ICE” es un programa gratuito (ya no soportado y actualizado por el USNO), compacto y fácil de usar, que aporta una gran cantidad de datos astronómicos muy precisos para un espacio de tiempo que abarca unos 250 años (!). A pesar de estar diseñado para el ya anticuado programa DOS, “ICE” es una herramienta extremadamente adecuada para la navegación y la astronomía.

Además de otras muchas posibilidades, “ICE” es capaz de calcular GHA y Declinaciones para un astro y un momento dado, así como la altura y el azimut del astro para una **posición estimada** (véase el capítulo 4), incluyendo las correcciones de la altura para el sextante. Como los valores de navegación obtenidos son tan exactos como los tabulados en el **Almanaque Náutico** (aprox. $0,1'$), el programa representa una alternativa adecuada, mientras que los valores tabulados del Almanaque Náutico impreso y las tablas para la reducción deberían estar disponibles únicamente como recurso en caso de un fallo en el ordenador. Las siguientes instrucciones para operar se refieren a la última versión (0.51). Solo se describen procesos relevantes para el cálculo de navegación.

1. Instalación

Copiar los archivos del programa a un directorio seleccionado en el disco duro o en un disco portátil.

2. Arranque del Programa

Introducir “ice” en el directorio y así aparecerá el menú principal.

Usar las teclas de función F1 a F10 para navegar a través de los submenús. El programa es más o menos autodescriptivo. Abrir el submenú “Datos Iniciales” (F1). Seguir las indicaciones de pantalla para entrar los datos sobre la fecha y hora de observación (F1), latitud estimada (F2), longitud estimada (F3), y el huso horario local (F6). La Latitud y Longitud estimadas definen la posición estimada.

Ha de usarse el formato correcto para la introducción de datos, señalado en la pantalla (formato decimal para la latitud y la longitud). Después de entrar los datos arriba citados, se confirman y aceptan éstos con F7. Para cambiar los valores permanentes por defecto, editar el archivo “ice.dft” mediante un editor de texto (después de haber hecho una copia de backup) y así se introducen los cambios deseados. No alterar los archivos con formatos de datos. Los números han de estar en columnas de 21 – 40. Puede crearse un

archivo para almacenar datos calculados: Ir al submenú “FileOutput” con F2 y entrar un nombre de archivo, por ejemplo: Output.Txt.

3. Cálculos de Datos para la Navegación

Ir al submenú “Navegación” (F7) desde el menú principal. Entrar el nombre del astro. El programa muestra la GHA y la Declinación del astro, GHA y declinación del Sol (si es visible) y la GHA del equinoccio de primavera para la fecha y la hora UT almacenados en el archivo “Datos Iniciales”.

La altura calculada H_c y el azimut Z_n marcan la posición aparente del astro observado desde la posición estimada. También se muestran en pantalla las correcciones aproximadas de altura (por refracción, semidiámetro y paralaje), basados en H_c y para el limbo inferior del astro. El semidiámetro de la Luna incluye el aumento. Las coordenadas calculadas para Venus y Marte **no incluyen** la corrección por fases. Por ello, deberían observarse el limbo inferior o superior (si son visibles). $\Delta T = TDT - UT$, la diferencia de predicción entre el **horario dinámico terrestre** y UT para la fecha dada. El valor de ΔT para 2006.0 previsto por “ICE” es de 67,8”, cuando el valor actual es 64,9” (véase más abajo).

La paralaje del horizonte y el semidiámetro de un astro puede obtenerse, si se precisa, a partir del submenú “Posiciones” (F3). Seleccionar “Posiciones Aparentes Geocéntricas” (F1) y entrar el nombre del astro (Sol, Luna, Planetas). La última columna muestra el centro del astro desde el centro de la Tierra, medido en unidades astronómicas ($1 \text{ AU} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$), HP y SD se calculan como sigue:

$$\text{seno } HP = r_E [km] / DST[km] ; \quad \text{seno } SD = r_B [km] / DST[km]$$

r_E representa el radio ecuatorial de la Tierra (6.378 km). r_B representa el radio del astro (Sol: 696.260 km, Luna: 1.378 km, Venus: 6.052 km, Marte: 3.397 km, Júpiter: 71.398 km, Saturno: 60.268 km).

La posición geocéntrica aparente se refiere a TDT, pero la diferencia entre TDT y UT no tiene un efecto determinante sobre HD ni sobre SD.

Para calcular el horario del orto y ocaso de un astro se ha de ir al submenú “Orto y Ocaso” (F6) e introducir el nombre del astro. Las columnas en la parte derecha de la pantalla indican los horarios para el orto en el meridiano de tránsito y el ocaso para la situación estimada ($UT + xh$ de acuerdo con el huso horario especificado).

El incremento de error para valores de ΔT indicados por “ICE” puede inducir a reducir la precisión de los resultados de cálculos de navegación futuros. Las coordenadas de la Luna son particularmente sensibles a los errores introducidos para ΔT . Lamentablemente, “ICE” no ofrece una opción para editar y modificar el valor de ΔT . Sin embargo, la gran precisión ofrecida por “ICE” en su mayoría no queda afectada cuando TDT es el argumento horario. Para obtener GHA y la declinación se recomienda el siguiente procedimiento:

1. Obtener GAST usando el Horario Sidéreo (F5). El argumento horario es UT.
2. Editar fecha y hora en “Valores Iniciales” (F1). El nuevo argumento horario es $UT + \Delta T$. Calcular RA y la declinación usando “Situaciones” (F3) y “Situación Geocéntrica Aparente” (F1).
3. Usar la fórmula siguiente para calcular GHA a partir de GAST y de RA (RA referido a la fecha del equinoccio verdadero de primavera).

$$GHA [^\circ] = 15 \cdot (GAST [h] + 24h - RA [h])$$

(Sumar o restar 360° si fuera necesario)

La gran precisión obtenida así para los valores de GHA y de Declinación puede usarse como un Standard interno para el control de datos de precisión media obtenidos a través del archivo “Navegación” (F7).

Encontrar una Posición Observada

Líneas de Posición

Toda línea geométrica o física que pasa por la situación de un observador (aún desconocida) y que sea accesible por su medida o su observación se denomina Línea de Posición, LoP. Por ejemplo, pueden serlo círculos de igual altura, meridianos de longitud, paralelos de latitud, demoras de compás a objetos terrestres, líneas costeras, ríos, carreteras o líneas de ferrocarril. **Una sola línea únicamente indica una serie infinita de posibles posiciones. La posición actual del observador está marcada por la intersección de, al menos dos Líneas de Posición, independientemente de su naturaleza.** El concepto de Línea de Posición es fundamental en la navegación moderna.

Reducción de las Observaciones (Determinantes)

Obtener una línea de posición a partir de una altura y de situar el polo de iluminación, GP de un astro se denomina en el lenguaje náutico, **una reducción de observación (determinante)**. Para comprender el proceso completamente se requieren considerables conocimientos de trigonometría esférica; pero solo conociendo sus conceptos fundamentales y algunas ecuaciones resulta suficiente para la mayoría de las aplicaciones en navegación astronómica. La descripción teórica, usando la **ley de los cosenos** y del **triángulo de posición**, se realiza en los capítulos 10 y 11. A continuación vamos a analizar el método semigráfico desarrollado por *Sumner* y por *Saint Hilaire*. Ambos métodos requieren solamente de cálculos relativamente simples y permiten al navegante representar líneas de posición sobre una **carta de navegación** (véase el capítulo 13).

Conociendo la altura y la situación GP del polo de iluminación de un astro también podemos saber el radio del correspondiente círculo de alturas iguales (nuestra línea de posición) y la posición de su centro. Como ya se mencionó en el *Cap. 1º*, tratar de representar los círculos de igual altura en una carta náutica es prácticamente imposible debido a las enormes dimensiones y las distorsiones causadas en la proyección de las cartas. Sin embargo, *Sumner* y *Saint Hilaire* demostraron que solo un pequeño arco de cada círculo de alturas iguales sería suficiente para determinar la posición del observador. Si este arco es relativamente corto, puede sustituirse por una línea recta, secante o tangente al círculo.

Meridiano Local, Ángulo Horario del Lugar y Ángulo en el Polo

Un meridiano que pasa por una posición dada se denomina **Meridiano Local** ó **Meridiano del Lugar**.. El ángulo formado por el círculo horario que pasa por el astro observado (sobre el meridiano superior) y el Meridiano Superior del Lugar tiene una función fundamental en Navegación Astronómica. En analogía con el ángulo horario de Greenwich, se mide aquél de forma circular hacia el Oeste desde el Meridiano Superior del Lugar ($0^\circ \dots 360^\circ$). En este caso dicho ángulo se denomina **Ángulo Horario Local, LHA**. También es posible medir dicho ángulo desde el Meridiano del Lugar hacia el Oeste entre 0° y 180° , así como hacia el Este entre 0° y 180° y, en cuyo caso se le denomina **Ángulo en el Polo, t**. En muchas fórmulas de Navegación, “LHA” y “t” pueden sustituirse entre sí, ya que las funciones trigonométricas aportan los mismos resultados para ambos ángulos. Por ejemplo, el coseno de $+315^\circ$ es el mismo que el coseno de -45° .

Tanto “LHA” como “t” son las sumas algebraicas del Ángulo Horario del Astro en Greenwich, GHA y la Longitud del observador, “Lon”. Para estar seguro de que el ángulo obtenido esta en el entorno deseado, han de observarse los siguientes condicionantes cuando se suman GHA y la Longitud del observador:

$$\begin{array}{llll}
 LHA = & GHA + Lon & \text{si} & 0^\circ < GHA + Lon < 360^\circ \\
 LHA = & GHA + Lon + 360^\circ & \text{si} & GHA + Lon < 0^\circ \\
 LHA = & GHA + Lon - 360^\circ & \text{si} & GHA + Lon > 360^\circ \\
 t = & GHA + Lon & \text{si} & GHA + Lon < 180^\circ \\
 t = & GHA + Lon - 360^\circ & \text{si} & GHA + Lon > 180^\circ
 \end{array}$$

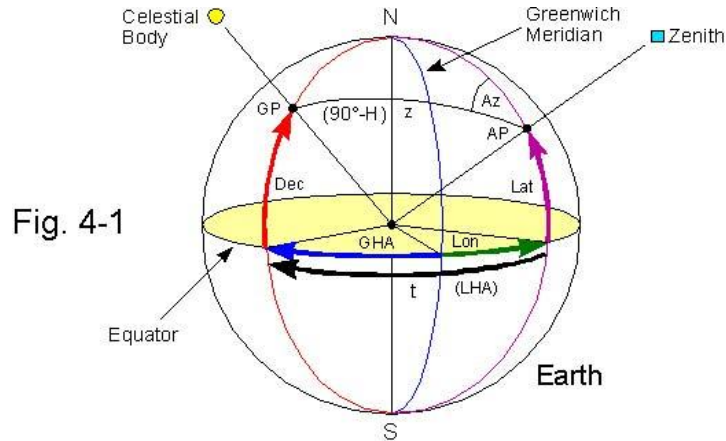
En todas las operaciones ha de observarse el signo de “Lon” y de “t” con mucho cuidado. El correspondiente convenio de signos es el siguiente:

Longitud oriental: signo positivo
Longitud occidental: signo negativo

Ángulo en el Polo Oriental: signo negativo
Ángulo en el Polo Occidental: signo positivo

Por razones de simetría nos referiremos, en las siguientes consideraciones, al Ángulo en el Polo aunque el Ángulo Horario Local nos llevaría a los mismos resultados (un astro tiene la misma altura con el Ángulo en el Polo +t, que con el -t).

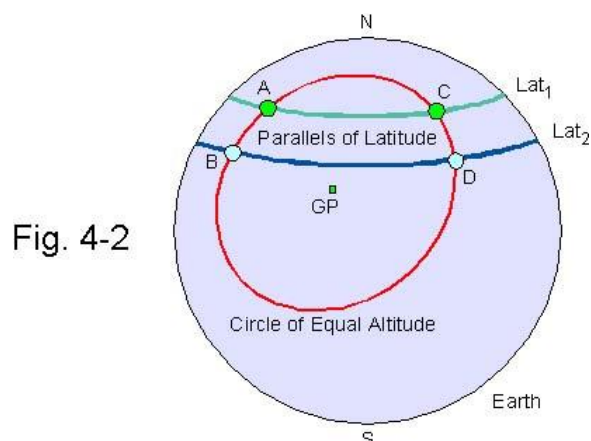
Fig. 4-1: Ilustra los diversos ángulos involucrados en el proceso de cálculo del determinante de un astro.



El Método de Sumner

Thomas H Sumner, un capitán de mar americano, se encontraba navegando en diciembre de 1837 desde *Carolina del Sur* hacia *Greenock en Escocia*. Cuando se estaba aproximando al *Canal de St. George* entre *Irlanda* y *El País de Gales*, se encontraba tomando una medida aislada de altura de sol, después de haber sufrido un largo periodo de mal tiempo. Utilizando el determinante de la altura (véase el capítulo 6) calculó la longitud desde su latitud estimada. Debido a que tenía muchas dudas sobre su posición de estima, repitió sus cálculos con dos latitudes ligeramente diferentes. Para su sorpresa las tres situaciones obtenidas se encontraban sobre una misma línea recta. Por casualidad, además esta recta demoraba un pequeño faro situado en la costa de Gales (*Small's Light*). Por pura intuición, *Sumner* navegó su barco a lo largo de esta línea cuando poco después el faro de *Small's Light* se hizo visible. *Sumner* concluyó que había encontrado una “Línea de Alturas Iguales”. La publicación de este método en 1843 marcó el inicio de la Navegación Astronómica “moderna” [18]. Aunque en la actualidad rara vez se utilice este método, sigue siendo una alternativa interesante. Es sencilla de comprender y los cálculos a realizar son extremadamente simples.

Fig. 4-2: Ilustra aquellos puntos en que un Círculo de Alturas Iguales intercepta dos paralelos seleccionados de latitud.



Un observador situado entre Lat_1 y Lat_2 puede encontrarse, tanto en el arco A-B cómo en el CD. Mediante un criterio de longitud de estima amplio el observador puede decidir muy fácilmente sobre cuál de los dos arcos se encuentra realmente. Digamos, por ejemplo sobre A-B. En este caso, el arco A-B representaría la fracción más importante de su Línea de Posición, descartando así la otra posibilidad, C-D. Podemos aproximar la Línea de Posición trazando una línea recta desde $A \rightarrow B$, que sería una secante del círculo de alturas iguales. Esta línea recta se llama la **Secante de Sumner**. Antes de representar la Secante de Sumner sobre la carta de navegación han de encontrarse las longitudes para cada punto de intersección A, B, C y D.

Procedimiento:

1.

Seleccionamos un paralelo de latitud norte (Lat_1) como nuestra latitud estimada, preferiblemente esta latitud debería ser marcada sobre la coordenada horizontal más cercana de nuestra carta.

2.

Mediante Lat_1 , la declinación del astro y su altura observada, calculamos el ángulo en el polo, t de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$\cos t = \pm (\sin Ho - \sin Lat \cdot \sin Dec) / (\cos Lat \cdot \cos Dec)$$

La ecuación se deriva del triángulo de posición (véase el capítulo 10 y 11). Ofrece dos soluciones, $+t$ y $-t$, si el coseno de $+t$ es igual al de $-t$. Geométricamente se corresponde con el hecho de que el círculo de alturas iguales intercepta el paralelo de latitud en dos puntos. Usando las siguientes fórmulas y ecuaciones, obtenemos las longitudes de estos puntos de intersección, Lon y Lon' :

$$Lon = t - GHA$$

$$Lon' = 360^\circ - t - GHA$$

$$\text{Si } Lon < -180^\circ \rightarrow Lon + 360^\circ$$

$$\text{Si } Lon' < -180^\circ \rightarrow Lon' + 360^\circ$$

$$\text{Si } Lon' > +180^\circ \rightarrow Lon' - 360^\circ$$

Comparando las longitudes obtenidas con la estimada, seleccionaremos la longitud más representativa y descartaremos la otra. Este método para determinar longitudes se llama observación horaria (véase el capítulo 6).

3.

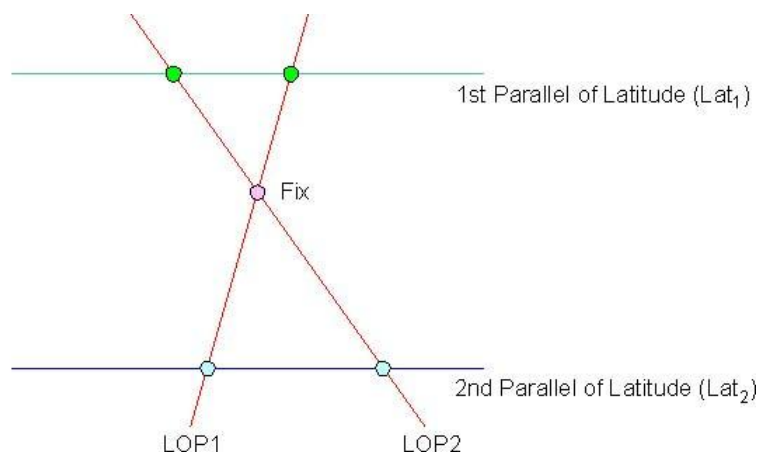
Seleccionando un paralelo de latitud sur (Lat_2) como nuestra latitud estimada, la distancia entre Lat_1 y Lat_2 no debería exceder 1 o 2 grados. Repetimos los pasos 1 y 2 con el segundo paralelo de latitud, Lat_2 .

4.

Sobre nuestra carta marcamos cada longitud hallada sobre el paralelo correspondiente y representamos la secante de *Sumner* para que pase por los puntos localizados (LOP_1).

Para obtener una posición observada, repetimos los pasos 1 hasta 4 con los mismos paralelos, la declinación y la altura de un segundo astro. El punto en que la Secante de Sumner obtenida intercepta LOP_1 y LOP_2 representa nuestra situación observada (*Fig 4-3*).

Fig. 4-3



Si sólo disponemos de una latitud estimada muy rudimentaria, el punto de intersección puede estar ligeramente desviado del intervalo definido por ambos paralelos. No obstante la posición observada resulta correcta. Una situación observada, obtenida por el método de *Sumner* incluye un pequeño error causado por desprestigiar la curvatura del arco de los círculos de alturas iguales. Podemos mejorar la situación observada por un proceso de aproximación. En este caso necesitamos un nuevo par de latitudes estimadas, más cercanas a la situación observada, repitiendo el procedimiento. Resulta ideal cuando la distancia horizontal entre los dos astros es de 90° (entre 30° y 150° es tolerable). En otro caso la situación observada se vuelve indistinguible. Además, ninguno de los astros debería encontrarse muy cerca del Meridiano del Lugar (véase el capítulo 6). El método de *Sumner* tiene la (pequeña) ventaja que no se precisa transportador de ángulos para representar las líneas de posición.

El Método de la Intersección de Rectas de Altura

Este procedimiento fue desarrollado por el oficial de la Armada Francesa, *St. Hilaire* y otros. Fue publicado por vez primera en 1875. A partir de aquí, fue adquiriendo gradualmente su carácter de standard para el cálculo de determinantes al evitar algunas de las limitaciones del método de *Sumner*. Aunque en el fondo resulta más complicado que el procedimiento *Sumner*, su aplicación práctica resulta muy sencilla para el usuario.

Teoría:

Para una determinada posición del observador, la altura de un astro bajado sobre el horizonte celeste, es sólo función de la latitud del observador, la declinación del astro y el ángulo en el polo (Horario Local del Astro). La altura estimada del astro se obtiene por aplicación de la ley de los cosenos a los lados del triángulo esférico de posición (véase el Capítulo 10 y 11).

$$\sin H = (\sin Lat \cdot \sin Dec + \cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t)$$

Elegimos una posición cercana a nuestra situación estimada, preferiblemente la posición más cercana sobre dos líneas de coordenadas que se corten en la carta. Esta posición se llama **Posición Asumida AP** (Fig 4-2), en analogía a la estimada en la que se basa. Aplicando la fórmula anterior se calcula la altura del astro correspondiente a las coordenadas geográficas de latitud y longitud de AP. La altura que se obtiene de esta forma se llama la **altura calculada, Hc**.

Habitualmente, Hc diferirá ligeramente de la actual **altura observada, Ho** (véase el Capítulo 2). La diferencia se denomina **el determinante de la altura**.

$$\Delta H = Ho - Hc$$

En el caso ideal de que Ho y Hc coincidiesen, supondría comprobar que el observador está en AP.

Seguidamente discutiremos qué posibles posiciones podría ocupar el observador con el mismo determinante, H. En este análisis se asume que el determinante de la altura es una cantidad infinitesimal, representándolo por δH . La fórmula general sería:

$$dH = d Lat \cdot \partial H / \partial Lat + dt \cdot \partial H / \partial t$$

Esta ecuación diferencial tiene un número infinito de soluciones. Mientras dH y ambos coeficientes diferenciales sean constantes, puede reducirse a una ecuación de la forma:

$$d Lat = a + b \cdot dt$$

En este caso, la gráfica resulta una línea recta y es suficiente para discutir dos casos especiales, $dt = 0$ y $dLat = 0$, respectivamente.

En el primer caso, el observador se encuentra sobre el mismo meridiano que AP y dH sólo es causado por una pequeña diferencia de latitud, $dLat$, mientras “t” permanece constante ($dt = 0$). Diferenciamos la fórmula de la altura con respecto a “Lat”:

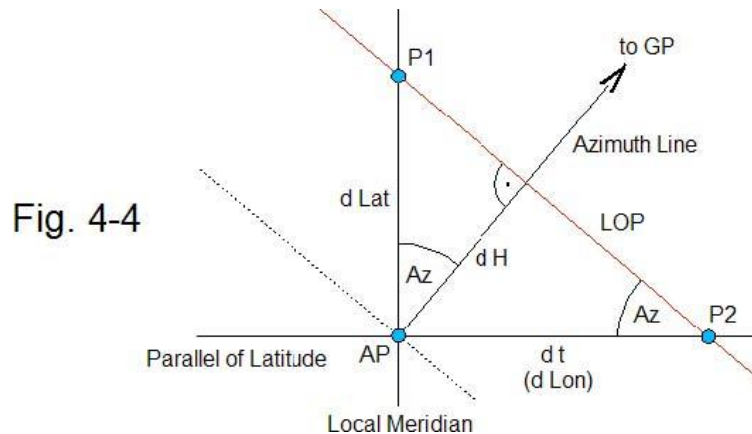
$$\sin H = \sin Lat \cdot \sin Dec + \cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t$$

$$d(\sin H) = (\cos Lat \cdot \sin Dec - \sin Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t) \cdot d Lat$$

$$\cos H \cdot dH = (\cos Lat \cdot \sin Dec - \sin Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t) \cdot d Lat$$

$$d Lat = dH \cdot \cos H / (\cos Lat \cdot \sin Dec - \sin Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t)$$

Sumando $dLat$ a Lat_{AP} , obtenemos el punto P_1 ; tal y como ilustra la Fig. 4-4, P_1 está sobre el círculo de alturas iguales del observador.



En el segundo caso, el observador está situado sobre el mismo paralelo de latitud y dH sólo es consecuencia de un ligero cambio del ángulo en el polo, dt , mientras Lat permanece constante ($dLat = 0$). Diferenciamos la fórmula de la altura con respecto a “ t ”:

$$\sin H = \sin Lat \cdot \sin Dec + \cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t$$

$$d(\sin H) = -\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t \cdot dt$$

$$\cos H \cdot dH = -\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t \cdot dt$$

$$dt = dH \cdot \cos H / (\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t)$$

Sumando dt (correspondiente a una diferencia equivalente de longitud, $d Lon$) a Lon_{AP} , se obtiene el punto P_2 que también está sobre el círculo de alturas iguales del observador. Así, podemos medir H_0 en P_1 y P_2 , respectivamente. Conociendo P_1 y P_2 , podemos trazar una línea recta que pase por las dos posiciones. Esta línea resulta tangente al círculo de alturas iguales y es nuestra **línea de posición, LoP**. El círculo máximo que pasa por AP y GP se representa por una línea recta, perpendicular a la línea de posición. El arco entre AP y GP es el radio del círculo de Alturas iguales. La distancia entre AP y el punto donde ésta línea, llamada **azimut**, corta la línea de posición es el determinante de la altura, dH . El ángulo formado por la línea del azimut y el meridiano del lugar AP se llama **ángulo azimutal o azimut, Az**. El mismo ángulo se forma por la línea de posición y el paralelo de latitud, que pasa por AP (Fig. 4-4).

Existen diferentes caminos para obtener Az y el azimut verdadero Az_N desde el triángulo rectángulo (plano) formado por AP, P_1 y P_2 :

1. Azimut en función del tiempo y de la altura:

$$\cos Az = dH / dLat = (\cos Lat \cdot \sin Dec - \sin Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t) / \cos H$$

$$\cos Az = (\cos Lat \cdot \sin Dec - \sin Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t) / \cos H$$

Az no es necesariamente idéntico al azimut verdadero, Az_N , mientras la función coseno indica ángulos entre 0° y $+180^\circ$, en cambio Az_N se mide desde 0° a $+360^\circ$.

Para obtener Az_N , hemos de sumar las siguientes igualdades cuando usamos la fórmula para el azimut en función del horario y de la altura:

$$\begin{aligned} Az_N &= Az, & \text{si } t < 0^\circ \text{ (ó bien, } 180^\circ < LHA < 360^\circ) \\ Az_N &= 360^\circ - Az, & \text{si } t > 0^\circ \text{ (ó bien, } 0^\circ < LHA < 180^\circ) \end{aligned}$$

2. Azimut en función del tiempo:

$$\tan Az = d \operatorname{Lat} / (\cos \operatorname{Lat} \cdot dt) = \sin t / (\sin \operatorname{Lat} \cdot \cos t - \cos \operatorname{Lat} \cdot \tan \operatorname{Dec})$$

El factor “cos Lat” es la circunferencia relativa del paralelo de latitud que pasa por AP (Ecuador = 1).

$$\tan Az = \sin t / (\sin \operatorname{Lat} \cdot \cos t - \cos \operatorname{Lat} \cdot \tan \operatorname{Dec})$$

Esta fórmula del azimut en función del horario no depende de la altura. Debido a que la función “tangente” y trabaja ángulos entre -90° y $+90^\circ$, se necesita un convenio diferente para distinguir Az_N :

$$\begin{aligned} Az_N &= Az_N & \text{si el numerador } < 0 \text{ y el denominador es } < 0. \\ Az_N &= Az_N + 360^\circ & \text{si el numerador } > 0 \text{ y el denominador es } < 0. \\ Az_N &= Az_N + 180^\circ & \text{si el denominador es } > 0. \end{aligned}$$

3. Fórmula Alternativa:

$$\sin Az = dH / (\cos \operatorname{Lat} \cdot dt) = -(\cos \operatorname{Dec} \cdot \sin t) / \cos h$$

ó lo que es lo mismo,

$$Az = \operatorname{arc} \sin (-\cos \operatorname{Dec} \cdot \sin t) / \cos h$$

Resulta destacable, que esta fórmula no es función de la altura. Los convenios para Az son:

$$\begin{aligned} Az_N &= Az_N & \text{si } \operatorname{Dec} > 0 \text{ y } t < 0. \\ Az_N &= Az_N + 360^\circ & \text{si } \operatorname{Dec} > 0 \text{ y } t > 0. \\ Az_N &= Az_N + 180^\circ & \text{si } \operatorname{Dec} < 0. \end{aligned}$$

4. Azimut en función de la altura:

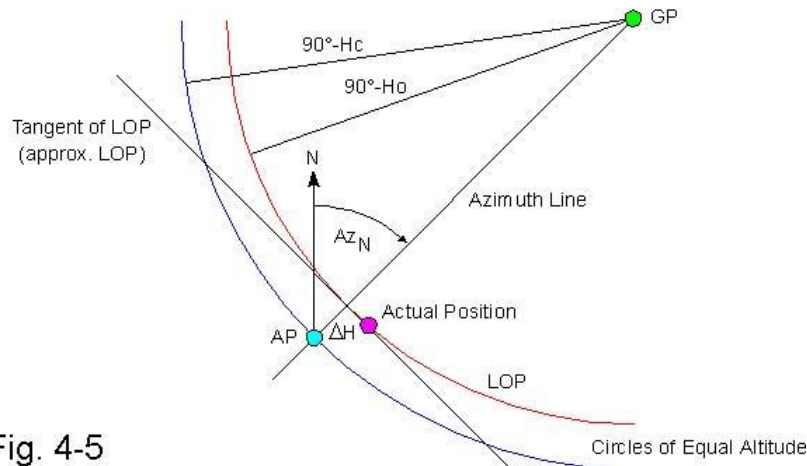
Esta fórmula procede directamente del triángulo de posición (véase la ley de cosenos en el capítulo 10 y 11) sin necesidad de usar el cálculo diferencial.

$$\cos Az = (\sin \operatorname{Dec} - \sin H \cdot \sin \operatorname{Lat}) / (\cos H_c - \cos \operatorname{Lat}).$$

Al igual que para el azimut en función del tiempo y de la altura, se mantienen los convenios:

$$\begin{aligned}
 A_{ZN} &= A_z, & \text{si } t < 0^\circ \text{ (ó bien, } 180^\circ < LHA < 360^\circ) \\
 A_{ZN} &= 360^\circ - A_z, & \text{si } t > 0^\circ \text{ (ó bien, } 0^\circ < LHA < 180^\circ)
 \end{aligned}$$

Al contrario que dH , H es un valor medible cuantitativamente y la línea de posición es curva. La Fig. 4-5 muestra una vista macroscópica de la línea de posición, del azimut y del círculo de alturas iguales.



Procedimiento

Aunque parezca complicada la teoría del determinante, su aplicación resulta muy simple y no requiere conocimientos de cálculo diferencial. El procedimiento se compone de los pasos siguientes:

1.

Se selecciona una **posición asumida, AP**, cercana a la **situación estimada**. La latitud y longitud de AP debería definirse preferentemente mediante un número entero de grados, según la escala seleccionada sobre la carta. También puede usarse directamente nuestra posición estimada como AP, en lugar de seleccionar una nueva posición asumida. No obstante, resulta muy práctico que las coordenadas que representen la posición asumida, AP, coincidan con sendas coordenadas enteras de la carta.

2.

Se calcula el valor del ángulo en el polo, t_{AP} , (el horario en el lugar, LHA_{AP}) entre GHA y la Lon_{AP} , cómo se ha descrito anteriormente.

3.

Se calcula la altura del astro observado en función de Lat_{AP} , t_{AP} , y Dec (altura calculada):

$$\cos H_c = \sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec + \cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec \cdot \cos t_{AP}$$

4.

Aplicando una de las formulas citadas anteriormente, se calcula el azimut verdadero al astro, Az_N , en función de Hc , Lat_{AP} , t_{AP} , y Dec ; por ejemplo:

$$\cos Az_N = (\sin Dec - \sin Hc \cdot \sin Lat_{AP}) / (\cos Hc \cdot \cos Lat_{AP})$$

$$Az_N = Az \quad \text{si } t < 0^\circ \text{ (ó bien, } 180^\circ < LHA < 360^\circ)$$

$$Az_N = 360^\circ - Az \quad \text{si } t > 0^\circ \text{ (ó bien, } 0^\circ < LHA < 180^\circ)$$

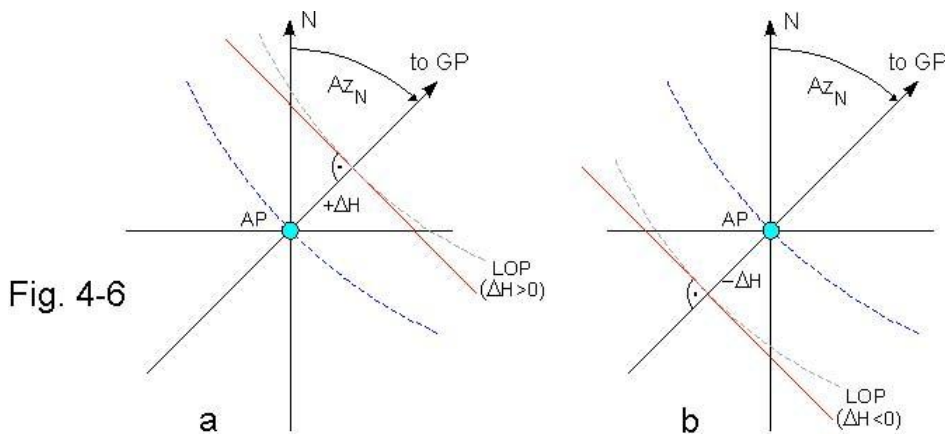
5.

Se calcula ahora el determinante de alturas, H , es decir, la diferencia entre la altura observada, Ho (véase el capítulo 2) y la altura estimada, calculada, Hc . El determinante se expresa normalmente en millas náuticas y es directamente proporcional a la diferencia entre los radios de los círculos de alturas iguales

$$\Delta H [nm] = 60 \cdot (Ho [^\circ] - Hc [^\circ])$$

6.

Sobre la carta se representa el azimut en forma de recta que pasa por AP (Fig. 4-6). Sobre esta línea se mide el determinante, ΔH desde AP (hacia GP si $H > 0$ y en sentido contrario si $H < 0$). Por el punto así encontrado sobre el azimut, se traza una perpendicular al mismo. Esta perpendicular es nuestra línea de posición (La Recta de Altura del Astro).



7.

Para obtener nuestra situación verdadera, se necesita más de una línea de posición. Para ello se repite el procedimiento, obteniendo una recta de altura de un segundo astro o bien del mismo en una observación posterior (fig. 4-4). El punto de corte de ambas líneas de posición (tangentes, rectas de altura) representa la situación observada. La segunda observación no necesariamente requiere el mismo AP que se ha usado anteriormente.

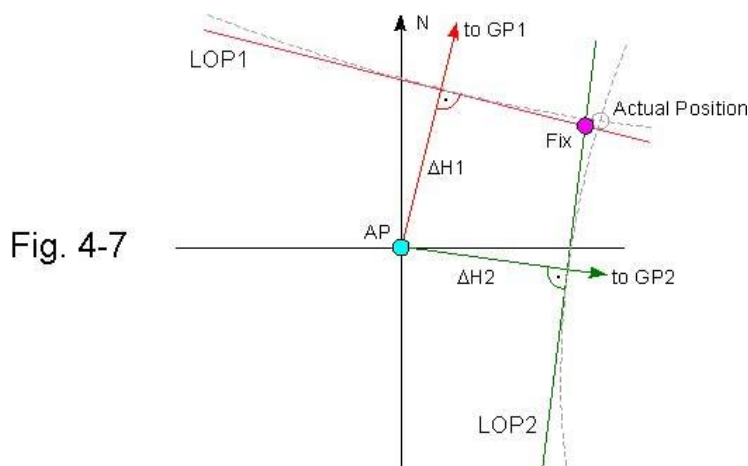


Fig. 4-7

Como se ha indicado arriba, el método de los determinantes ignora la curvatura de las rectas de altura utilizadas. Por ello, la situación observada no es una situación exacta pero si **muy aproximada** (comparada con AP). El error residual resulta tolerable mientras el radio de los círculos de alturas iguales sea suficientemente grande y si AP no se encuentra demasiado alejado de la situación actual (véase el capítulo 16). El error geométrico inherente al método de los determinantes, puede reducirse por un tanteo aproximativo, por ejemplo, sustituyendo la situación observada para AP y repitiendo los cálculos con las mismas alturas de astros e iguales polos de iluminación). Ello conduce a una posición aún más próxima a la real. Si fuese necesario, puede reiterarse el procedimiento hasta obtener posiciones virtuales que permanezcan constantes. Debido a que una posición estimada suele ser más cercana a la verdadera que la asumida, esta última puede requerir mayor número de aproximaciones. También aumenta la exactitud por observación de tres astros en lugar de solo dos. Teóricamente, las tres rectas de altura deberían cortarse en el mismo punto. Pero como no hay observaciones totalmente exentas de error, habitualmente se obtienen tres puntos de corte con tres rectas de altura, que forman un triángulo de error (Fig 4-8).

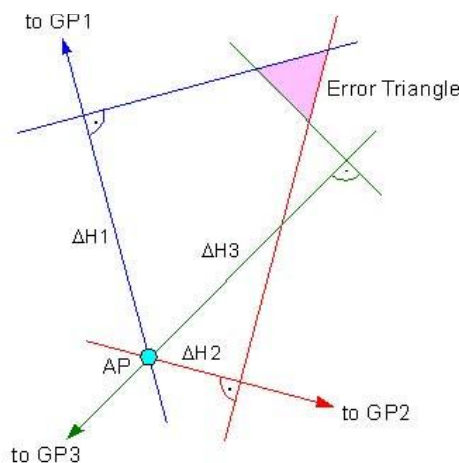


Fig. 4-8

Por la forma y el tamaño (área) del triángulo obtenido, se tiene una idea general sobre la calidad de las observaciones (véase el capítulo 16). La **posición más probable, MPP**, coincide aproximadamente con el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo de error (el punto de corte de las tres bisectrices de los tres ángulos del triángulo de error obtenido).

Si se observan más de tres Astros, las rectas de altura obtenidas formarán el polígono correspondiente

Cálculo Directo

Si no se desea representar rectas de altura para determinar la posición observada, puede calcularse la posición más probable directamente desde un número ilimitado n ($n > 1$) de observaciones. El Almanaque Náutico aporta un procedimiento mediador. Primero, se han de calcular los valores auxiliares para A, B, C, D, E y G:

$$A = \sum_{i=1}^n \cos^2 Az_i \quad B = \sum_{i=1}^n \text{seno } Az_i \cdot \cos Az_i \quad C = \sum_{i=1}^n \text{seno}^2 Az_i$$

$$D = \sum_{i=1}^n (\Delta H)_i \cdot \cos Az_i \quad E = \sum_{i=1}^n (\Delta H)_i \cdot \text{seno } Az_i \quad G = A \cdot C - B^2$$

En estas fórmulas, Az indica el azimut *verdadero* del astro respectivo. Los valores de H están medidos en grados en la misma unidad que la latitud y la longitud. Las coordenadas geográficas de la situación del observador MPP, se obtienen como sigue:

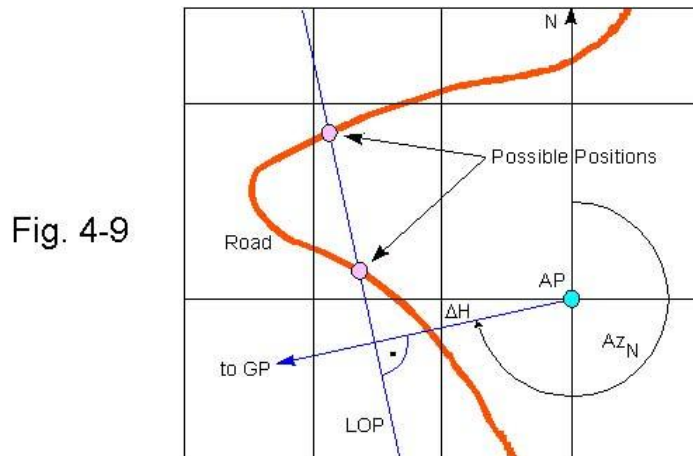
$$Lon = Lon_{AP} + [(A \cdot E - B \cdot D)] / [G \cdot \cos Lat_{AP}] ;$$

$$Lat = Lat_{AP} + [(C \cdot D - B \cdot E)] / [G]$$

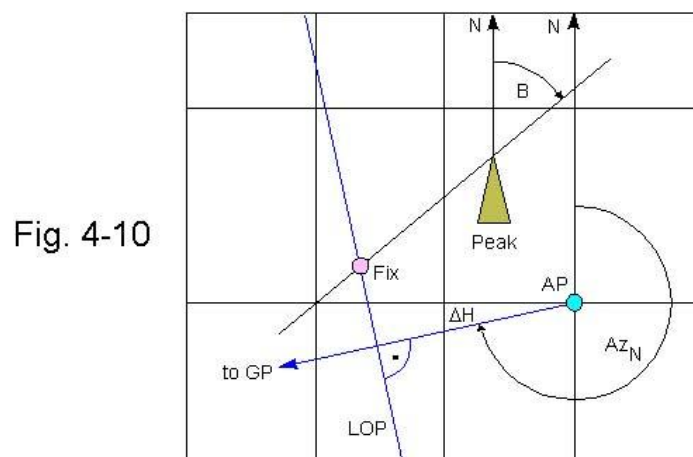
Este método no corrige los errores geométricos inherentes al procedimiento del cálculo de determinantes y el corte de las rectas de altura. Estos errores se eliminan, si fuese necesario, por aplicación del método de tanteo aproximativo hasta que MPP se mantenga virtualmente constante. Para esta propuesta se sustituye el MPP calculado para AP. Para cada astro se calculan nuevos valores para el ángulo en el polo "t" (ó LHA), Hc, H y Az_N . Con estos valores se calculan A, B, C, D, E, G, así como longitud y latitud. Repitiendo el procedimiento las posiciones resultantes convergirán rápidamente. En la mayoría de los casos, una o dos series resultarán suficientes; depende de la distancia y de la posición verdadera.

Combinación de diferentes líneas de posición

Como el punto de corte de dos líneas de posición, dependiendo de su naturaleza, marcan la posición geográfica del observador, una Recta de Altura puede bastar para fijar una posición si se puede cruzar con otra línea de posición, aunque sea de distinto tipo.



En el desierto, por ejemplo, puede determinarse la posición en un momento dado, localizando en el mapa el punto en que una Recta de Altura obtenida de un astro, corte el camino por el que se circula, (Fig. 4-9). También puede obtenerse una posición combinando una Recta de Altura de un astro con la demora a un pico distante en una montaña, por ejemplo o a otra marca destacada en el entorno del observador (Fig 4-10). “B” es la demora del compás al objeto terrestre visualizado (corregida en su declinación magnética).



Ambos ejemplos muestran la versatilidad de la navegación por líneas de posición.

La Posición de un Barco en Navegación

La observación astronómica de un barco en movimiento requiere medidas especiales de corrección por el cambio de posición entre las diferentes observaciones, a no ser que la segunda determinación se obtenga por rápidas sucesiones de medidas o de forma simultánea, por ejemplo, por un segundo observador.

Siempre que sean conocidos el rumbo y la velocidad sobre el fondo (rumbo y velocidad efectivos) la navegación por líneas de posición ofrece una resolución gráfica muy sencilla al problema planteado.

Suponiendo que se toma la primera observación a la HTU₁ y la segunda a HTU₂, la distancia navegada “d” durante el tiempo navegado T₂ – T₁ a la velocidad “v”, es:

$$d [Mn] = (T_2 [h] - T_1 [h]) \cdot v [n]$$

$$1 \text{ n (nudo)} = 1 \text{ Mn/h}$$

El rumbo C se mide mediante un compás de aguja magnética o con un compás giroscópico, de esta forma se determina la nueva situación relativa con respecto a la anterior.

Se comienza trazando ambas líneas de posición de la forma habitual, descrita en el capítulo 4, Fig. 4-3 o Fig 4-6. Después, se fija un punto sobre la primera línea de posición (de acuerdo con la observación a T₁) y este punto se prolonga según el rumbo C, a la velocidad “v” durante la distancia navegada entre T₂ y T₁. Seguidamente se traza una paralela a la 1ª línea de posición desde el punto final del vector anterior. El punto en el que la 1ª línea de posición trasladada corte a la 2ª línea de posición (resultante ésta de la observación a T₂), representa la posición del barco en el instante T₂. La posición obtenida con este procedimiento se denomina **posición observada**, (Fig.5-1).

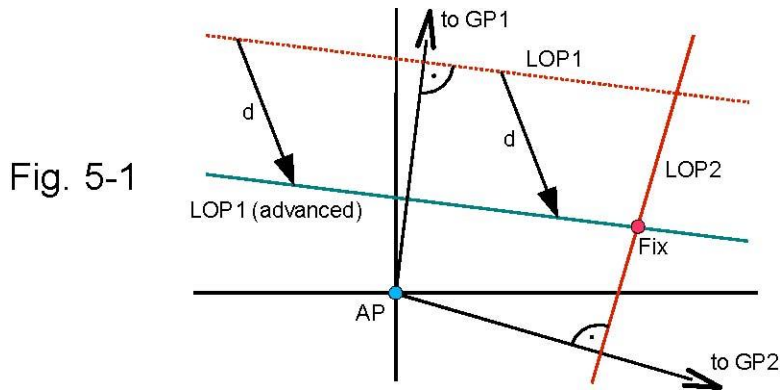


Fig. 5-1

De similar manera se puede obtener la posición a T₁, retrocediendo desde la segunda línea de posición, (Fig. 5-2).

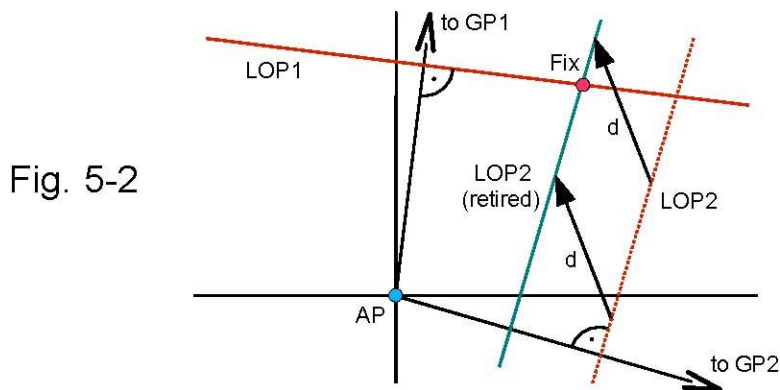
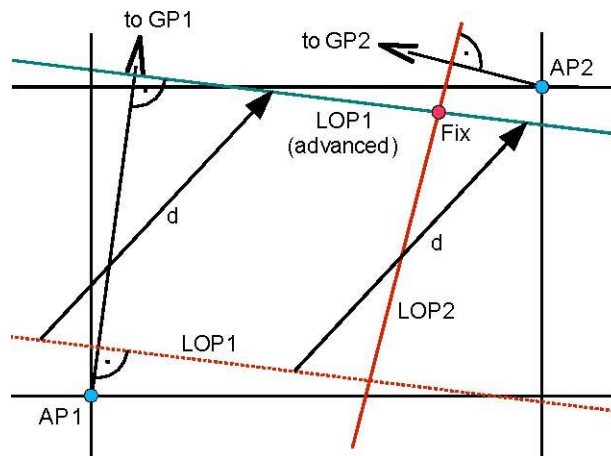


Fig. 5-2

Este método de posicionamiento astronómico también puede aplicarse al posicionamiento y traslado de líneas de posición terrestres.

También es posible elegir dos AP's diferentes, no demasiado alejados de sus respectivas posiciones estimadas. AP1 debería cerrarse hacia la posición estimada a T_1 . AP2 hacia la posición estimada a T_2 (Fig. 5-3).



Un punto aproximado calculado con el barco en navegación no suele ser tan exacto como uno estacionario. Frecuentemente, el rumbo y la velocidad sobre el fondo solo pueden ser estimados, al no conocerse con exactitud los efectos de la corriente y del abatimiento producido por el viento.

Además, existe un error geométrico debido al método aplicado. Se supone que cada punto del círculo de alturas iguales representa una posible posición del barco, recorriendo igual distancia, "d" siguiendo la derrota (véase el capítulo 12) definida por el rumbo "C". El resultado de las operaciones sería un círculo distorsionado. En consecuencia, el LOP trasladado (adelantado o retrasado) no es exactamente paralelo al LOP original. El error de posición resultante crece normalmente al aumentar la distancia "d" (19). Este procedimiento suele dar buenos resultados cuando se navega distancias cortas (de unas 50 millas) entre las dos observaciones.

Métodos para obtener la Latitud y la Longitud

Latitud por la polar

La altura observada de una estrella situada sobre la vertical celeste del Polo Norte geográfico, se considera numéricamente igual a la latitud del observador (Fig. 6-1).

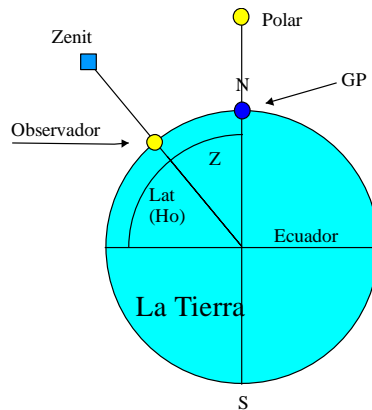


Fig. 6 - 1

Esta situación es, aproximadamente el caso de la Estrella Polar (Polaris) en el Hemisferio Norte. Sin embargo, como hay una distancia angular medible entre la estrella Polar y el eje polar de la Tierra (en la actualidad, aproximadamente de 1°), la altura exacta de la estrella Polar es función del ángulo horario local. La altura de la Polar queda también afectada por el movimiento de nutación. Para obtener la latitud por la Polar, es necesario aplicar algunas correcciones:

$$Lat = Ho - I^o + a_o + a_1 + a_2$$

Las correcciones a_0 , a_1 y a_2 son todas ellas función del Horario Local de Aries, LHA_{Aries} , de la latitud estimada del observador y del mes anual. Estos correctores se encuentran descritos en las Tablas para el cálculo de la Polar en el Almanaque Náutico [12]. Para obtener los datos, el observador ha de conocer su posición estimada y la hora aproximada.

Cuando se utiliza un almanaque electrónico en lugar del Almanaque Náutico puede calcularse la latitud fácilmente mediante el siguiente procedimiento. La Lat_E es la latitud estimada. Dec es la declinación de la estrella Polar y t es el ángulo en el polo de la estrella Polar (calculado entre GHA y la longitud estimada del observador). H_c es la altura calculada y H_o es la altura observada y corregida (véase el Capítulo 4).

$$Seno H_c = (seno Lat_E \cdot seno Dec + cos Lat_E \cdot cos Dec \cdot cos t)$$

$$\Delta H = H_o - H_c$$

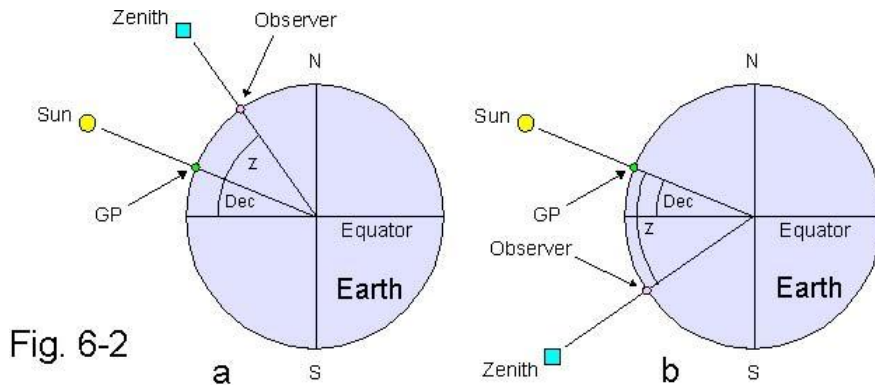
Sumando la diferencia de alturas, ΔH , a la latitud estimada, se obtiene la latitud mejorada:

$$Lat \approx Lat_E + \Delta H$$

El error de la latitud obtenida es menor que 0,1' para Lat_E inferiores a 70° y cuando el error de Lat_E es $< 2^\circ$, puede obtenerse la longitud exacta. En regiones polares el algoritmo se vuelve menos preciso. No obstante, el resultado puede mejorarse por tanteo repetitivo (sustituyendo cada vez la latitud por la lat_E y repitiendo el cálculo). Deberían evitarse los cálculos a latitudes superiores a 85° porque se precisan un número muy alto de cálculos repetitivos. El método puede conducir a resultados erráticos cuando el observador se acerca mucho al Polo Norte ($Lat_E \times Dec_{Polar}$). Un error en la latitud resultante de una longitud errónea no puede compensarse por tanteo repetitivo. Sin embargo, el error es siempre menor que 1' cuando el error de la longitud es inferior a 1° .

Latitud al Mediodía (Latitud a la altura máxima, es decir a la culminación)

Se trata de un método muy simple, que permite al observador determinar la latitud mediante la medición de la altura del sol (o de cualquier otro astro) en el momento de su culminación en el firmamento (momento en que alcanza el astro su máxima altura). No se precisa una medida muy exacta del horario. La altura del sol pasa por un máximo, **aproximadamente** (véase "longitud al mediodía") en el momento de pasar por el meridiano superior (**mediodía local aparente, LAN**) cuando el GP del sol tiene la misma longitud que el observador. Estará al norte o al sur del mismo en función de la declinación del sol y de la latitud geográfica del observador. La latitud del observador se calcula muy fácilmente por suma algebraica o diferencia entre la declinación y la distancia cenital observada, z ($90^\circ - Ho$) del sol, en función de que el sol esté al norte o al sur del observador (Fig. 6-2).



1. Si el sol está al sur del observador (Fig. 6-2a): $Lat = Dec + z = Dec - Ho + 90^\circ$
2. Si el sol está al norte del observador (Fig. 6-2b): $Lat = Dec - z = Dec + Ho - 90^\circ$

Declinación norte es positiva, declinación sur es negativa.

Antes de comenzar con las observaciones, se hace necesario disponer de una información aproximada de la longitud actual con el fin de estimar el momento (GMT) de paso por el meridiano. Se consulta el momento de paso del sol por el meridiano superior de Greenwich en las páginas diarias del Almanaque Náutico, sumando o restando 4' por cada grado de longitud oeste o este respectivamente. Para determinar la culminación, se comienza con la observación del sol unos 15 minutos antes de la hora de paso por el meridiano. Se sigue el incremento del valor de la altura del sol con el sextante, se anota la altura máxima alcanzada cuando el sol comienza a descender de nuevo sobre el horizonte y se aplican las correcciones habituales para hallar la altura verdadera.

Se consulta la declinación del sol a la hora aproximada de paso (GMT) por el meridiano del lugar según la página diaria del Almanaque Náutico y se aplica la fórmula adecuada. Históricamente, la latitud al mediodía y la latitud por la Polar son los métodos más antiguos de la navegación astronómica.

Observación no Coincidente con el Momento de Paso por el Meridiano del Lugar.

En ocasiones, no es posible medir la altura máxima del sol, por ejemplo en caso de estar éste oscurecido por una nube en el momento de la culminación. Si se ha tenido la posibilidad de medir la altura del sol unos minutos antes del paso por el meridiano del lugar, se sigue teniendo la posibilidad de situar la latitud exacta por reducción de la altura observada a la de paso por el meridiano, siempre que se conozca la longitud con exactitud (véase más abajo) y se tenga una idea de la latitud estimada. El método es similar al usado con la estrella Polar. Se precisa conocer el tiempo de paso por el meridiano del lugar (GMT), considerando la longitud este positiva y la longitud oeste como negativa:

$$T_{Tránsito} [h] = 12 - EoT [h] - Lon[^\circ] / 15$$

El ángulo en el polo del sol “t”, se calcula desde el momento de la observación (GMT):

$$t [^\circ] = 15 \cdot (T_{Observación} [h] - T_{Tránsito} [h])$$

Comenzando con la latitud estimada, Lat_E , se calcula la altura del sol en el momento de la observación. Se aplica la fórmula descrita en el capítulo 4 para el cálculo de la altura:

$$\text{seno } H_c = (\text{seno } Lat_E \cdot \text{seno } Dec + \cos Lat_E \cdot \cos Dec \cdot \cos t)$$

La declinación se refiere a la del momento de la observación. Se calcula la diferencia entre la altura observada y la calculada.

$$\Delta H = H_o - H_c$$

Se calcula ahora una latitud mejorada:

$$Lat_{mej} \approx Lat_E \pm \Delta H$$

($+\Delta H$, si el sol está al Norte del observador; $-\Delta H$, si el sol está al sur del observador).

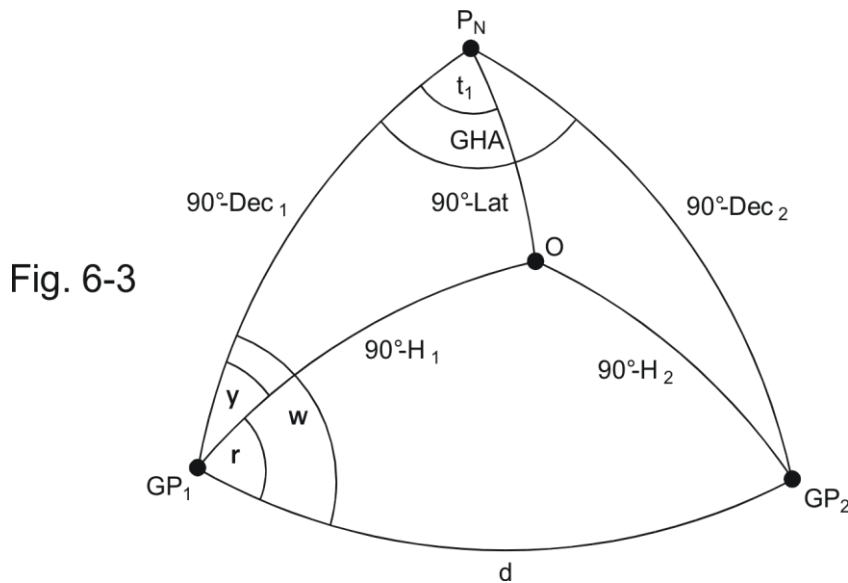
La latitud exacta se obtiene por tanteo repetitivo (por iteración), sustituyendo, por ejemplo, $Lat_{mejorada}$ por Lat_E y repitiendo el cálculo hasta obtener una latitud virtualmente constante. Generalmente no son necesarios más que uno o dos tanteos. El método tiene algunas limitaciones y requiere un análisis muy crítico. El arco de meridiano debería ser muy pequeño en comparación con la distancia cenital del sol. En otro caso se hace necesario un considerable número de tanteos repetitivos. El método puede producir resultados erráticos si Lat_E es muy parecida a la declinación. Por ello, debería descartarse la medición cuando el observador no está seguro si el sol está situado al sur o al norte de su posición.

La influencia de un error en la longitud **no disminuye** por el tanteo del cálculo repetitivo sobre la latitud.

Latitud por Dos Alturas

Incluso si no se dispone de una longitud estimada, puede determinarse una latitud precisa por observación de dos astros. Los datos requeridos de cada uno son su ángulo horario en Greenwich, su declinación y su altura medida sobre el horizonte [7].

Los cálculos se basan en la resolución de triángulos esféricos (véase los Capítulos 10 y 11). En la Fig 6-3, P_N representa el Polo Norte; "O" la posición, no conocida, del observador; GP_1 , es la situación geográfica del primer astro y GP_2 la del segundo.



En primer lugar se ha de considerar el triángulo esférico $[GP_1, P_N, GP_2]$. La Fig 6-3 sólo muestra una de las configuraciones posibles. "O" también puede estar fuera del triángulo $[GP_1, P_N, GP_2]$. Se define la diferencia entre los dos ángulos horarios en Greenwich, ΔGHA :

$$\Delta GHA = |GHA_2 - GHA_1|$$

Aplicando la ley de los cosenos a los lados del triángulo, se calcula la distancia "d" sobre el círculo máximo desde GP_1 a GP_2 :

$$\cos d = \text{seno } Dec_1 \cdot \text{seno } Dec_2 + \cos Dec_1 \cdot \cos Dec_2 \cdot \cos (\Delta GHA)$$

Ahora se resuelve el mismo triángulo para el ángulo ω , la distancia horizontal entre el P_n y GP_2 , medido en GP_1 .

$$\cos \omega = (\text{seno } Dec_2 - \text{seno } Dec_1 \cdot \cos d) / (\cos Dec_1 \cdot \text{seno } d)$$

Para el triángulo esférico $[GP_1, O, GP_2]$ se calcula el ángulo ρ , la distancia horizontal entre "O" y GP_2 , medido como GP_1 .

$$\cos \rho = (\text{seno } H_2 - \text{seno } H_1 \cdot \cos d) / (\cos H_1 \cdot \text{seno } d)$$

Finalmente, se calcula el ángulo ψ , la distancia horizontal entre P_N y “O”, medido en GP_1 . Este cálculo presenta dos soluciones: ψ_1 y ψ_2 , según sea $\cos \rho = \cos (-\rho)$.

$$\Psi_1 = | \omega - \rho | ; \quad \psi_2 = \omega + \rho$$

Los círculos de alturas iguales se cortan entre sí en dos puntos. Las posiciones correspondientes se encuentran en las posiciones opuestas del círculo máximo que pasa por GP_1 y GP_2 (no visible en la Fig 6-3). Aplicando de nuevo la ley de los cosenos para la resolución de los lados del triángulo esférico [GP_1, P_N, O]:

$$\text{seno Lat}_1 = \text{sen}H_1 \cdot \text{Seno Dec}_1 + \cos H_1 \cdot \cos Dec_1 \cdot \cos \psi_1$$

$$\text{seno Lat}_2 = \text{sen}H_1 \cdot \text{Seno Dec}_1 + \cos H_1 \cdot \cos Dec_1 \cdot \cos \psi_2$$

Se seleccionan los valores más cercanos a la latitud estimada. Los demás se descartan. Si ambas posiciones fuesen muy similares y no fuese posible una diferenciación evidente, han de descartarse las observaciones de uno de los astros para seleccionar los datos de otro con una posición más adecuada.

Aunque el método requiera cálculos más complicados que, por ejemplo, la de una latitud por la polar, tiene la ventaja que, midiendo dos alturas, habitualmente tras poco tiempo más tarde se puede determinar la altura de culminación de algún astro. Además, si se observan estrellas fijas incluso un error del cronómetro de algunas horas no tendría gran influencia sobre los resultados de latitud ya que, en estos casos, ΔGHA y ambas declinaciones cambian muy lentamente con el paso del tiempo.

Cuando la distancia horizontal entre los astros observados se encuentra cercana a los 0° o los 180° , la posición del observadores se cierra sobre el círculo máximo entre GP_1 y GP_2 . En este caso, las dos soluciones para la latitud resultan similares entre sí. Encontrar cual de las dos se corresponde con la latitud actual puede resultar complicado (depende de la calidad de la latitud estimada). Las latitudes resultantes también se superponen cuando los astros observados tienen aproximadamente el mismo ángulo horario con Greenwich.

Longitud al Mediodía (Longitud por Alturas Iguales)

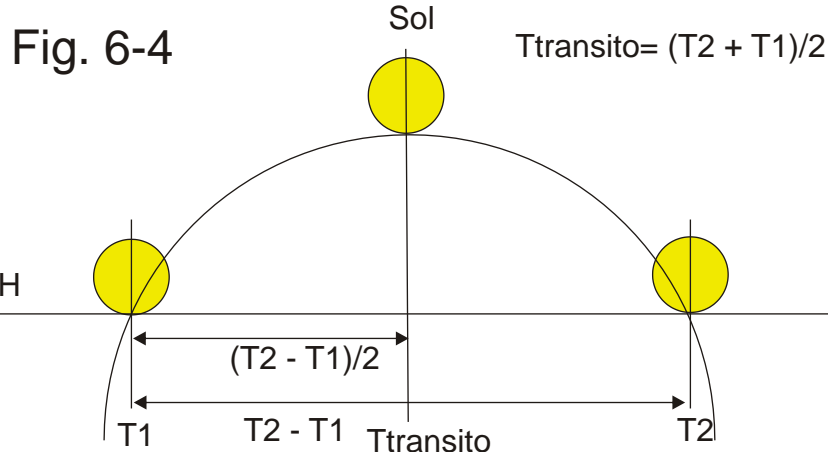
Debido a que la Tierra gira con una velocidad angular de 15° por hora con respecto al sol medio, el horario de paso del sol por el meridiano local (mediodía local aparente), $T_{\text{tránsito}}$, puede usarse para calcular la longitud del observador:

$$Lon [^\circ] = 15 \cdot (12 - T_{\text{Tránsito}} [h] - EoT_{\text{Tránsito}} [h])$$

$T_{\text{tránsito}}$, está expresado en horario GMT (y en formato decimal). Debe corregirse el horario de paso por el meridiano con $EoT_{\text{tránsito}}$ porque que se observa el sol aparente, y no el sol medio (véase el Capítulo 3). Debido a que el Almanaque Náutico contiene únicamente valores diarios de EoT (véase el Capítulo 3) a los horarios 0:00:00 y 12:00:00 GMT, el valor para $EoT_{\text{Tránsito}}$ ha de ser calculado por interpolación

Como la altura del sol (como la de cualquier astro) pasa por una zona máxima, resulta difícil de medir el momento de máxima altura. El momento exacto del paso por el meridiano puede obtenerse a partir de dos mediciones iguales de alturas de sol.

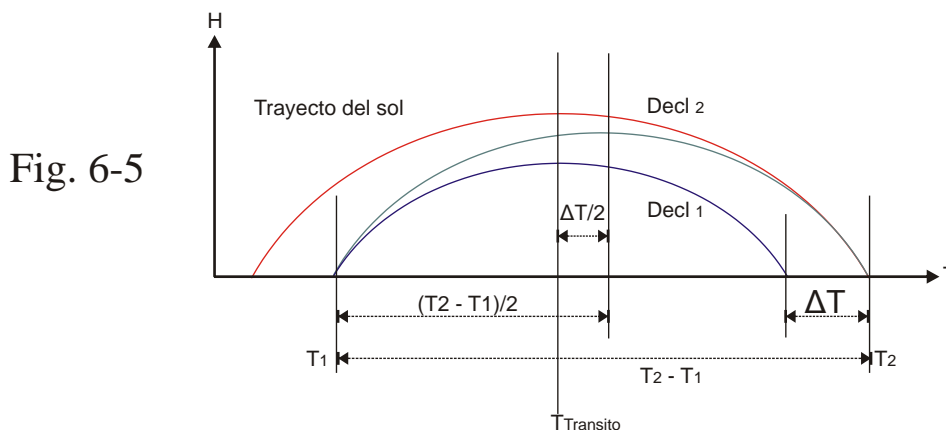
Si aceptamos que el sol se mueve sobre el firmamento a lo largo de un arco simétrico, $T_{\text{Tránsito}}$ es la media entre los horarios correspondientes a dos puntos de igual altura de sol. Uno se sitúa antes de LAN (T_1) y el segundo, después de LAN (T_2), Fig. 6-4:



En la práctica, los horarios de alturas iguales del sol se miden de la forma siguiente:

El observador determina el horario, T_1 que corresponde a la toma de altura de la mañana, H. Al horario de tarde, T_2 , se toma otra medida del sol decreciente cuando pasa por la misma altura observada por la mañana. Como solo se miden los horarios de alturas iguales no se precisa efectuar correcciones de las alturas. El intervalo $T_2 - T_1$ debería ser superior a unas 2 horas.

Lamentablemente, el arco que describe el sol solo es simétrico con respecto a $T_{\text{Tránsito}}$ si la declinación es constante durante el intervalo de la observación. Esto se cumple aproximadamente alrededor de la época de los solsticios. Durante el resto del año, y particularmente durante la época de los equinoccios, $T_{\text{Tránsito}}$ difiere muy significativamente de la media de T_1 y de T_2 a causa de la variación de la declinación del sol. La Fig. 6-4 muestra la altura del sol en función del tiempo e ilustra cómo afecta la variación de la declinación al camino aparente recorrido por el sol sobre el firmamento durante el intervalo de tiempo, ΔT .



La línea azul muestra el camino del sol para una cierta declinación constante, $Decl_1$. El trazo rojo describe como sería este camino a una declinación diferente, $Decl_2$. En ambos casos, el camino aparente recorrido por el sol es simétrico con respecto a $T_{\text{Tránsito}}$. En consecuencia, si la declinación del sol variará de $Decl_1$ y T_1 a $Decl_2$ y T_2 , el camino recorrido quedaría reflejado por la línea verde. Ahora T_1 y T_2 ya no son simétricos a $T_{\text{Tránsito}}$. El paso del sol por el meridiano transcurre antes del momento $(T_1 + T_2)/2$ si la declinación del sol varía hacia el paralelo de latitud del observador, tal y como se ve en la Fig. 6-4. En otro caso, el paso por el meridiano transcurre después de $(T_1 + T_2)/2$. Debido a que el tiempo y el ángulo del horario local (ángulo del meridiano) son proporcionales entre sí, resulta un error sistemático en la longitud.

El error de la longitud es insignificante alrededor de la época de los solsticios, cuando la declinación permanece prácticamente constante y es máximo (superior a varios minutos de arco) durante la época de los equinoccios, cuando el rango de variación de la declinación es máximo (aprox. 1'/h). Además, el error de la longitud aumenta al aumentar la latitud de la posición del observador y puede llegar a ser dramático en las regiones polares.

La longitud obtenida puede mejorarse, si fuese necesario, por aplicación de la ecuación de alturas iguales [5].

$$\Delta t \approx (\tan Lat / \operatorname{seno} t_2 - \tan Dec_2 / \tan t_2) \cdot \Delta Dec; \quad \Delta Dec = Dec_2 - Dec_1$$

Δt es la variación del ángulo en el polo, t , que compensa la variación de altura, resultante de una pequeña variación en declinación, ΔDec . Lat es la latitud del observador. Si la latitud exacta no es conocida, puede usarse una latitud estimada. t_2 es el arco de meridiano del sol a T_2 . Como inicialmente no conocemos el valor exacto para t_2 , comenzamos nuestros cálculos con un valor aproximado de t_2 , calculado a partir de T_1 y de T_2 :

$$t_2 [^\circ] \approx 15 \cdot (T_2 [h] - T_1 [h]) / 2$$

Llamamos T_2^* al valor mejorado de T_2 .

$$T_2^* [^\circ] = T_2 [h] - \Delta T [h] = T_2 [h] - \Delta t [^\circ] / 15$$

En el instante T_2^* el sol pasará por a la misma altura que se midió para el instante T_1 si la declinación no ha variado durante el intervalo de la observación. Según ello, el horario mejorado para el momento de paso por el meridiano será:

$$T_{Tránsito} = (T_1 + T_2^*) / 2$$

El error residual del inicial para t_2 normalmente resulta insignificante. Puede reducirse, si fuese necesario, por iteración. Sustituyendo T_2^* por T_2 , obtenemos un arco de meridiano mejorado, t_2^* :

$$t_2^* [^\circ] \approx 15 \cdot (T_2^* [h] - T_1 [h]) / 2$$

Con el arco de meridiano mejorado, t_2^* , calculamos la corrección mejorada Δt^* :

$$\Delta t^* \approx (\tan Lat / \operatorname{seno} t_2^* - \tan Dec_2 / \tan t_2^*) \cdot \Delta Dec$$

Finalmente, obtenemos un valor horario mucho más exacto, T_2^{**} :

$$T_2^{**} [h] = T_2 [h] - \Delta t^* [^\circ] / 15$$

Y, en consecuencia:

$$T_{Tránsito} = (T_1 + T_2^{**}) / 2$$

El error de ΔDec debería ser tan pequeño como fuera posible. Es preferible calcular ΔDec con un programa de almanaque computerizado de gran precisión, que obtenerlo del Almanaque Náutico. Si hemos de usar éste último, ΔDec debería calcularse a partir de la variación diaria de declinaciones manteniendo el error de redondeo lo más reducido posible.

A pesar de que la ecuación de alturas iguales es estrictamente válida sólo para variaciones de declinación infinitesimales, δDec , puede ser usada también para variaciones medibles, ΔDec , superiores a algunos minutos de arco, incluso sin sacrificar demasiada precisión. Disponiendo de horarios medidos con suficiente exactitud, el valor residual del error de longitud rara vez supera $\pm 0,1'$.

Teoría de la Ecuación de Alturas Iguales

La ecuación de alturas iguales se deriva de la fórmula para la altura usando **cálculo diferencial** (véase el Capítulo 4):

$$\text{Seno } H = \text{seno } Lat . \text{ seno } Dec + \text{cos } Lat . \text{ cos } Dec . \text{ cos } t$$

Primeramente, necesitamos conocer cómo afecta una pequeña variación de la declinación a seno H. Formamos la derivada parcial respecto a la declinación:

$$\text{Seno } Lat . \text{ cos } Dec - \text{cos } Lat . \text{ seno } Dec . \text{ cos } t = \delta(\text{seno } H) / \delta Dec$$

Así, el cambio en seno de H, causado por un cambio infinitesimal en la declinación, es:

$$(\text{seno } Lat . \text{ cos } Dec - \text{cos } Lat . \text{ seno } Dec . \text{ cos } t) . d Dec = \delta(\text{seno } H) . d Dec / \delta Dec$$

Ahora formamos la derivada parcial con respecto a t, con el fin de comprobar cómo un pequeño cambio en el arco de meridiano podría afectar al seno de H:

$$- \text{cos } Lat . \text{ cos } Dec . \text{ seno } t = \delta(\text{seno } H) / \delta t$$

El cambio en seno de H causado por un cambio infinitesimal en el arco de meridiano, dt, es:

$$- \text{Cos } Lat . \text{ cos } Dec . \text{ seno } t . dt = (\delta(\text{seno } H) . dt) / \delta t$$

Debido a que queremos que ambos efectos se compensen y se anulen entre ellos, el diferencial resultante debe ser igual a cero:

$$\delta(\text{seno } H) . dDec / \delta Dec + (\delta(\text{seno } H) . dt) / \delta t = 0$$

$$- (\delta(\text{seno } H) . dt) / \delta t = \delta(\text{seno } H) . dDec / \delta Dec$$

$$\text{cos } Lat . \text{ cos } Dec . \text{ seno } t . dt = (\text{seno } Lat . \text{ cos } Dec - \text{cos } Lat . \text{ seno } Dec . \text{ cos } t) . dDec$$

$$dt = (\text{seno } Lat . \text{ cos } Dec - \text{cos } Lat . \text{ seno } Dec . \text{ cos } t) . dDec / (\text{cos } Lat . \text{ cos } Dec . \text{ seno } t)$$

$$dt = (\text{tang } Lat / \text{seno } t - \text{tang } Dec / \text{tang } t) . dDec$$

$$\Delta t = (\text{tang } Lat / \text{seno } t - \text{tang } Dec / \text{tang } t) . \Delta Dec$$

Medida de la Longitud en un Barco en Navegación

En un barco que esta navegando, no solo hemos de tener en cuenta la influencia de la variación de la declinación, sino también los efectos del cambio de latitud y de longitud sobre la altura de un astro durante el intervalo de su observación. Diferenciando el seno de H (fórmula de la altura) en función de la latitud, tendremos:

$$\cos Lat \cdot \text{seno Dec} - \text{seno Lat} \cdot \cos Dec \cdot \cos t = \delta(\text{seno H}) / \delta Lat$$

De nuevo la diferencial total es igual a 0 porque los efectos combinados de latitud y de arco de meridiano se anulan entre sí con respecto a su influencia sobre el seno de H:

$$\delta(\text{seno H}) \cdot dLat / \delta Lat + (\delta(\text{seno H}) \cdot dt) / \delta Dec = 0$$

Análogamente al cambio de declinación, obtenemos la siguiente fórmula para pequeños cambios de latitud:

$$dt = (\text{tang Dec} / \text{seno } t - \text{tang Lat} / \text{tang } t) \cdot dLat$$

La corrección para las variaciones combinadas de declinación, Latitud y Longitud es:

$$\Delta t \approx (\text{tang Lat}_2 / \text{seno } t_2 - \text{tang Dec}_2 / \text{tang } t_2) \cdot \Delta Dec + (\text{tang Dec}_2 / \text{seno } t_2 - \text{tang Lat}_2 / \text{tang } t_2) \cdot \Delta Lat - \Delta LON$$

ΔLat e ΔLON son los pequeños cambios de latitud y de longitud, correspondientes a la trayectoria del barco en navegación entre T_1 y T_2 . El arco de meridiano, t_2 , ha de incluir una corrección para ΔLON :

$$t_2 [^\circ] \approx (15 \cdot (T_2 [h] - T_1 [h]) - \Delta LON) / 2$$

ΔLat e ΔLON se calculan en base al Rumbo, C, a la velocidad sobre el fondo, v (SOG) y al tiempo navegado.

$$\Delta Lat ['] = v [n] \cdot \cos C \cdot (T_2 [h] - T_1 [h])$$

$$Lat_2 = Lat_1 + \Delta Lat$$

$$\Delta Lon ['] = (v [n] \cdot \text{seno } C \cdot (T_2 [h] - T_1 [h])) / \cos Lat$$

$$LON_2 = LON_1 + \Delta LON$$

$$1 n (\text{nudo}) = 1 \text{ Milla náutica} / h$$

C se mide desde el Norte verdadero en el sentido de las agujas del reloj y entre 0° y 360° . De nuevo, el tiempo corregido para alturas iguales es:

$$T_2^* [^\circ] = T_2 [h] - \Delta t [^\circ] / 15$$

$$T_{Tránsito} = (T_1 + T_2^*) / 2$$

La longitud calculada para $T_{Tránsito}$ se refiere a la posición del observador a T_1 . La longitud a T_2 es la correspondiente a la suma de la longitud y ΔLON durante el tiempo navegado.

El error de longitud debido a un cambio de latitud puede resultar dramático y requiere la particular atención del navegante, incluso cuando el barco navega a una velocidad moderada. Las consideraciones anteriores demuestran claramente que determinar longitudes exactas a iguales alturas de sol no es tan simple como parece a primera vista, particularmente en un barco en navegación. Por ello es muy lógico que, con el desarrollo de la línea de posición en navegación (incluyendo simples soluciones gráficas para un barco en navegación), las longitudes a iguales alturas se vuelven poco importantes.

El Ángulo en el Polo del Sol en el Instante de su Culminación (a su máxima altura)

La *fig. 6-5* muestra que la altura máxima del sol, llamada culminación, es ligeramente diferente a la altura en el momento de paso por el meridiano del lugar si cambia la declinación. La ecuación de alturas iguales nos permite calcular el ángulo en el polo del sol en este momento. Dividiendo cada miembro de la ecuación por un infinitésimo intervalo de tiempo, dT :

$$dt / dT = (tang Lat / seno t - tang Dec / tang t) \cdot dDec / dT$$

Midiendo el rango de variación de “ t ” y “ Dec ” en minutos de arco por hora, obtendremos:

$$900 \text{ ' / h} = (tang Lat / seno t - tang Dec / tang t) \cdot dDec['] / dT[h]$$

Como “ t ” es un ángulo muy pequeño, podemos sustituir “ $tang t$ ” por “ $seno t$ ”:

$$900 \approx (tang Lat - tang Dec) / tang t \cdot dDec['] / dT[h]$$

Ahora podemos resolver la ecuación para “ $tang t$ ”:

$$tang t \approx (tang Lat - tang Dec) / 900 \cdot dDec['] / dT[h]$$

Debido a que un ángulo muy pequeño (en radianes) es prácticamente igual a su tangente, tendremos:

$$t[^\circ] \cdot \pi / 180 \approx (tang Lat - tang Dec) / 900 \cdot dDec['] / dT[h]$$

Midiendo “ t ” en minutos de arco, la ecuación queda como sigue:

$$t['] \approx 3,82 \cdot (tang Lat - tang Dec) \cdot dDec['] / dT[h]$$

donde $dDec / dT$ es el rango de variación de la declinación medido en minutos de arco por hora.

La culminación (máxima altura alcanzada) ocurre después del paso por el meridiano si “ t ” es positivo y antes del paso, si “ t ” es negativo.

Por ejemplo, durante el equinoccio de primavera ($Dec \approx 0$; $dDec / dT \approx +1' / h$), un observador que se encuentre a una latitud Norte de $+80^\circ$ observaría la culminación del sol, por ejemplo $86,8''$ después de paso por el meridiano (LAN) a $t \approx +21,7'$. En cambio, un observador situado en latitud $+45^\circ N$, observaría su altura máxima, por ejemplo solo $15,3''$ después del paso por el meridiano, a $t \approx +3,82'$.

La Culminación de la Altura del Sol.

Puede utilizarse la última ecuación para evaluar el error sistemático de una latitud al mediodía. Esta última se basa en la máxima altura alcanzada por el sol y no en la altura en el momento de paso por el meridiano. Siguiendo el ejemplo anterior, el observador situado a 80°N de latitud observaría una culminación 86,7" después del paso por el meridiano. Durante este intervalo, la declinación del sol podría haber cambiado de 0 a +1,445" (asumiendo que la declinación es igual a cero en el momento de paso del sol por el meridiano). Usando la fórmula para la altura (véase el capítulo 4), se obtiene:

$$\text{Seno } H_c = (\text{seno } 80^\circ \cdot \text{seno } 1,445'' + \cos 80^\circ \cdot \cos 1,445'' \cdot \cos 21,7'); \quad H_c = 10^\circ 00' 0,72''$$

En cambio, la altura calculada en el momento de paso por el meridiano sería exactamente de 10°. En consecuencia, el error de latitud al mediodía sería de -0,72". De la misma forma podemos calcular la altura máxima del sol observado a una latitud de 45°N:

$$\text{Seno } H_c = (\text{seno } 45^\circ \cdot \text{seno } 0,255'' + \cos 45^\circ \cdot \cos 0,255'' \cdot \cos 3,82'); \quad H_c = 45^\circ 00' 0,13''$$

En este caso el error de la latitud al mediodía sería de sólo -0,13".

Los ejemplos citados arriba muestran que, igual que en los equinoccios, el error sistemático de la latitud al mediodía, causado por la alteración de la declinación del sol, no es relevante porque es mucho menor que otros errores de la observación, como por ejemplo, los errores de depresión o refracción. Un error medible de la latitud solo puede ocurrir si el observador se encuentra situado muy cerca de los polos terrestres (tang. de Lat!). Durante la época de los solsticios, el error de latitud es prácticamente inexistente.

La Observación Horaria

El proceso para determinar la longitud a partir de una observación unitaria de la altura de un astro (ya tomada de cualquier forma con este propósito) se llama **observación horaria**. Sin embargo, este método requiere conocer la latitud exacta, por ejemplo la del mediodía. Resolviendo la fórmula de la altura para el ángulo en el polo, "t" (véase Cap. 11), tendremos:

$$\pm \cos t = (\text{seno } H_o - \text{seno } Lat \cdot \text{seno } Dec) / \cos Lat \cdot \cos Dec$$

La ecuación tiene dos soluciones, +t y -t \approx cos(-t). Geométricamente, esto se corresponde con el hecho de que el círculo de alturas iguales corta al paralelo de latitud en dos puntos. Usando las siguientes igualdades y convenios, se obtienen las longitudes de estos puntos de corte, Lon₁ y Lon₂:

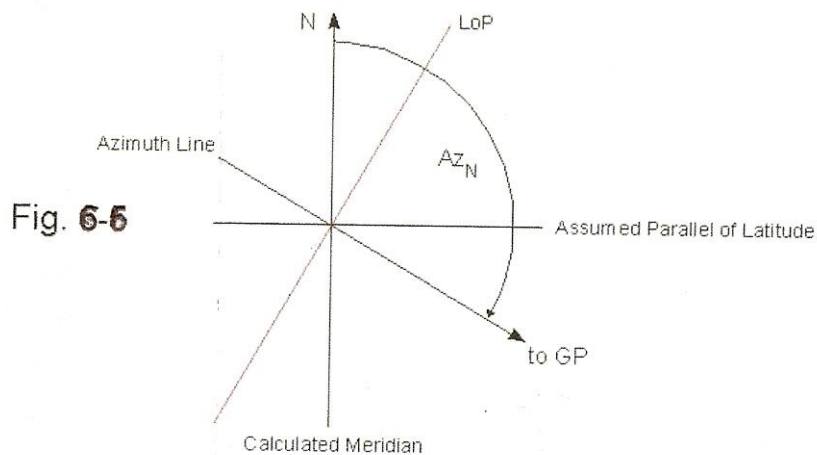
$$\begin{aligned} Lon_1 &= t - GHA \\ Lon_2 &= 360^\circ - t - GHA \end{aligned}$$

$$\text{Si } Lon_1 < -180^\circ \rightarrow Lon_1 + 360^\circ$$

$$\text{Si } Lon_2 < -180^\circ \rightarrow Lon_2 + 360^\circ$$

$$\text{Si } Lon_2 > +180^\circ \rightarrow Lon_2 - 360^\circ$$

Una observación horaria puede usarse para determinar una línea de posición a partir de una latitud estimada individual. Tras resolver la observación horaria, se traza el paralelo de latitud observada y el meridiano calculado. Ahora se calcula el azimut al astro desde la posición así obtenida (véase la fórmula del azimut en el capítulo 4) y se representa sobre la gráfica. La línea de posición es la perpendicular a la línea del azimut y la corta por la posición calculada (Fig. 6-6).



El método descrito anteriormente sólo tiene interés histórico. El navegante moderno preferirá sin duda, el método del determinante (véase el capítulo 4), que puede usarse sin restricciones del ángulo en el polo (ángulo horario local), latitud y declinación (véase más abajo).

Proceder a una observación horaria no es viable cuando el astro se encuentra muy cerca del meridiano. Usando el cálculo diferencial puede demostrarse que el error en el ángulo horario “dt”, que resulta de un error en la altura “dH”, varía proporcionalmente en función de $1/\text{seno } t$:

$$dt = - (\cos Ho \cdot dH) / (\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \text{seno } t)$$

Como “dt” varía de forma inversamente proporcional al $\cos Lat$ y al $\cos Dec$, las latitudes y declinaciones altas deberían evitarse y sin duda, con las mismas restricciones, también aplicadas al método de *Sumner*.

Cálculo Directo de una Posición

Combinando el **método de una observación horaria** con el de **una latitud por dos rectas de altura**, puede encontrarse la situación de un barco siempre que conozcamos la hora con toda exactitud. Tras obtener la latitud verdadera, Lat , a través de dos rectas de altura (véase arriba), se puede aplicar la fórmula de la observación horaria y calcular el ángulo en el polo del primer astro, t_1 a partir de los valores de Lat , Dec_1 y H_1 (véase la *Fig. 6 – 3*). Para t_1 se obtienen dos longitudes posibles. Se selecciona la más cercana a la posición estimada. Este método resulta muy riguroso y no sólo es una aproximación. Se utiliza este método raras veces, debido a que es más engorroso que las representaciones gráficas descritas en el capítulo 4.

Cálculo del Horario y la Longitud por Distancias Lunares

En la navegación astronómica, el Horario y la Longitud están interrelacionados. Resulta imposible encontrar una longitud en la mar o en un terreno desconocido, sin conocer exactamente la hora y viceversa. Por ello, los antiguos navegantes estaban básicamente restringidos a navegar únicamente con la latitud en sus travesías largas, por ejemplo, estaban obligados a navegar a lo largo de un paralelo de latitud prefijado hasta que llegaban a la vista de la costa. Como no existía la posibilidad de estimar un horario de llegada a destino, muchas embarcaciones embarrancaban durante la navegación nocturna o con mala visibilidad. Motivados por enormes pérdidas de tripulaciones, material y mercancías, los científicos trataron de resolver el problema del cálculo de longitud usando efemérides astronómicas como referencias de tiempo. En principio, solo son aplicables aquellos métodos en los que el tiempo al que se observa el evento es virtualmente independiente de la posición geográfica ocupada por el observador.

Durante el siglo XV fue sugerido (*Regiomontanus*) medir el tiempo por el movimiento aparente de la luna en relación a las estrellas fijas del firmamento, pero resultando impracticable debido a la falta de efemérides relevantes de la Luna y también por no disponer en aquella época de los instrumentos con precisión suficiente para medir ángulos.

Aproximadamente a mediados del siglo XVIII, el desarrollo de la astronomía y de los instrumentos de medición necesarios, hicieron posible la medición del tiempo por observaciones lunares. En particular, deducir el tiempo de una llamada “**distancia Lunar**” que consistía en aplicar la distancia angular entre la Luna y un astro preseleccionado como referencia, se transformó en un método muy extendido. Aunque se trata de un método bastante incómodo, representó una parte esencial de la navegación astronómica y fue usado hasta bien avanzado el siglo XIX, incluso hasta mucho después de inventarse el cronómetro mecánico (Harrison, 1736). Esto fue debido, principalmente a la limitada disponibilidad de cronómetros y por sus precios desorbitados. Cuando los cronómetros se hicieron más asequibles, a mediados del siglo XIX, el método de las distancias lunares fue abolido gradualmente. Hasta 1906, el Almanaque Náutico incluía las tablas para el cálculo de las distancias lunares, con predicciones de distancias angulares geocéntricas entre la Luna y algunos astros seleccionados para intervalos de 3 horas. Después, las tablas dejaron de usarse y las distancias lunares pasaron más o menos al olvido (casi un siglo después de que las Tablas originales de Distancias Lunares estén ya en desuso, Steven Wepster mantiene la tradición: Sus tablas (2003) aún existen y están disponibles a través de Internet [14]). No mucho después se introdujo la disponibilidad de señales horarias por radio en todo el planeta y así el problema de la longitud fue resuelto definitivamente. En la actualidad las distancias lunares tienen principalmente un interés histórico. A pesar de ello, el método es tan ingenioso, que vale la pena su estudio detallado.

La idea en que se basa el método de las distancias lunares es fácil de entender. Como la Luna se mueve sobre la esfera celeste a una velocidad aproximada de unos 0,5° por hora, la distancia angular entre la Luna, M y un astro situado en su camino, B, varía a una velocidad similar y con la suficiente rapidez como para ser utilizado para medir el transcurso del tiempo. El valor del tiempo relacionado con el recorrido de una determinada distancia lunar esta tabulado.

Las distancias lunares tabuladas están calculadas desde las coordenadas ecuatoriales geocéntricas para M y B, usando la ley de los cosenos:

$$\cos D = \text{seno } DEC_M \cdot \text{seno } DEC_B + \cos DEC_M \cdot \cos DEC_B \cdot \cos (GHA_M - GHA_B)$$

ó bien,

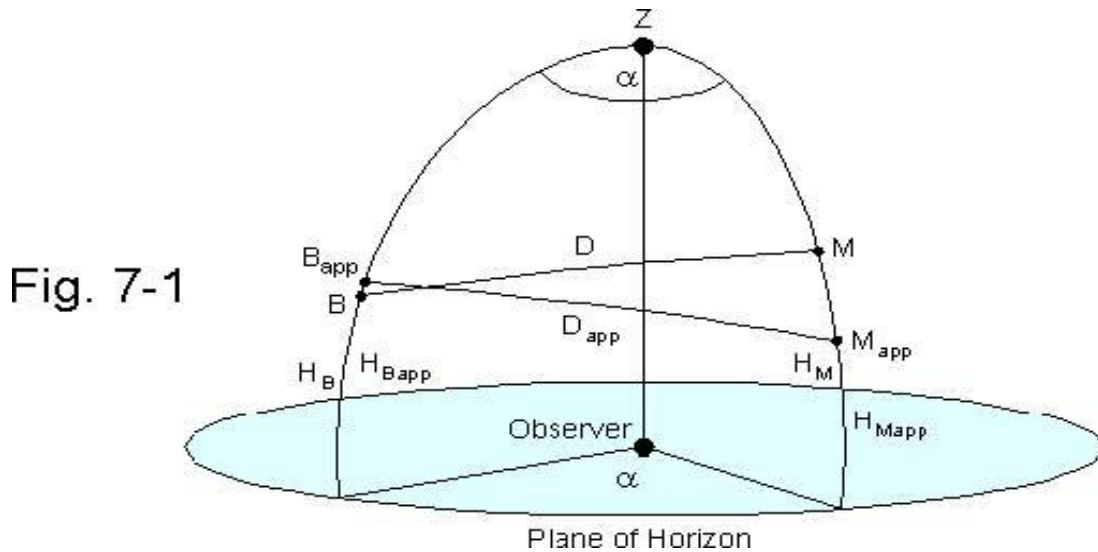
$$\cos D = \text{seno } DEC_M \cdot \text{seno } DEC_B + \cos DEC_M \cdot \cos DEC_B \cdot \cos [15 \cdot (RA_M [h] - RA_B [h])]$$

D es la distancia lunar geocéntrica. Estas fórmulas pueden usarse para actualizar las tablas propiamente dichas con ayuda del Almanaque Náutico o bien las de algún almanaque electrónico si no estuviera disponible alguna tabla necesaria de las distancias lunares.

Depuración de la Distancia Lunar

Antes de poder comparar una distancia lunar medida por el observador con los valores tabulados ha de ser reducida al correspondiente ángulo geocéntrico por depuración de los efectos de refracción y paralaje. Este importantísimo proceso se llama “**Depuración de la distancia lunar**”. Entre los numerosos procedimientos desarrollados para ello se encuentran tanto métodos rigurosos como “rápidos”. Seguidamente discutiremos las metódicas, básicamente iguales, desarrolladas por *Dunthorne* (1976) y por *Young* (1856). Ambas son muy rigurosas para un modelo esférico de la Tierra.

La *Fig. 7-1* muestra las posiciones de la Luna y de un astro de referencia en el sistema horizontal de coordenadas. Señalizamos las posiciones aparentes de los centros de la Luna y del astro de referencia por M_{app} y B_{app} , respectivamente. Z es el cenit.



El lado D_{app} del triángulo esférico B_{app} - Z - M_{app} representa la distancia lunar aparente. Las alturas de M_{app} y de B_{app} (obtenidas después de aplicar las correcciones debidas al error de índice, depresión del horizonte y al semidiámetro) son, respectivamente $H_{M_{app}}$ y $H_{B_{app}}$. Los círculos verticales de ambos astros forman el ángulo α , que a su vez representa la diferencia entre el azimut de la Luna, Az_M y el azimut del astro de referencia, Az_B :

$$\alpha = Az_M - Az_B$$

La posición de cada astro se ve alterada a lo largo de su círculo vertical por la refracción atmosférica y la paralaje en altura. Tras corregir H_{Mapp} y H_{Bapp} por ambos efectos, se obtiene la posición geocéntrica de M y de B. Se representa la altura de M por H_M y la de B por H_B . H_M es siempre superior que H_{Mapp} porque la paralaje de la Luna siempre es mayor que la refracción. El ángulo α no queda afectado jamás ni por la refracción ni por la paralaje en altura:

$$Az_M = Az_{Mapp}$$

$$Az_B = Az_{Bapp}$$

El lado D del triángulo esférico B-Z-M es la desconocida distancia lunar geocéntrica. Si se conociera el valor exacto de α , sería muy sencillo el cálculo de D por la ley de los cosenos. Lamentablemente, el navegante no dispone de medios necesarios para calcular α con la precisión necesaria. Sin embargo, es posible calcular D solamente a partir de los cinco parámetros D_{app} , H_{Mapp} , H_M , H_{Bapp} , y H_B .

Aplicando la fórmula de los cosenos al triángulo esférico formado por el cenit y las dos posiciones aparentes:

$$\cos D_{app} = \text{seno } H_{Mapp} \cdot \text{seno } H_{Bapp} + \cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = (\cos D_{app} - \text{seno } H_{Mapp} \cdot \text{seno } H_{Bapp}) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

Repitiendo el procedimiento para el triángulo esférico formado por el cenit y las posiciones geocéntricas:

$$\cos D = \text{seno } H_M \cdot \text{seno } H_B + \cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = (\cos D - \text{seno } H_M \cdot \text{seno } H_B) / (\cos H_M \cdot \cos H_B)$$

Mientras α se mantenga constante, podrán combinarse ambas fórmulas del azimut:

$$(\cos D - \text{seno } H_M \cdot \text{seno } H_B) / (\cos H_M \cdot \cos H_B) = (\cos D_{app} - \text{seno } H_{Mapp} \cdot \text{seno } H_{Bapp}) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

De esta forma se ha eliminado el desconocido ángulo α . Ahora se resta la unidad a ambos miembros de la ecuación:

$$[(\cos D - \text{seno } H_M \cdot \text{seno } H_B) / (\cos H_M \cdot \cos H_B)] - 1 = (\cos D_{app} - \text{seno } H_{Mapp} \cdot \text{seno } H_{Bapp}) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp}) - 1$$

$$[(\cos D - \text{seno } H_M \cdot \text{seno } H_B) / (\cos H_M \cdot \cos H_B)] - [(\cos H_M \cdot \cos H_B) / (\cos H_M \cdot \cos H_B)] =$$

$$(\cos D_{app} - \text{seno } H_{Mapp} \cdot \text{seno } H_{Bapp}) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp}) - (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp}) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

$$(\cos D - \text{seno } H_M \cdot \text{seno } H_B - \cos H_M \cdot \cos H_B) / (\cos H_M \cdot \cos H_B) =$$

$$(\cos D_{app} - \text{seno } H_{Mapp} \cdot \text{seno } H_{Bapp} - \cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp}) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

Utilizando la fórmula de los cosenos en trigonometría esférica:

$$(\cos D - \cos(H_M - H_B)) / (\cos H_M \cdot \cos H_B) = (\cos D_{app} - \cos(H_{Mapp} - H_{Bapp})) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

Despejando ahora $\cos D$, se obtiene la formula de *Dunthorne* para la “depuración de distancias lunares”:

$$\cos D = \cos(H_M - H_B) + (\cos H_M \cdot \cos H_B) \cdot [\cos D_{app} - \cos(H_{Mapp} - H_{Bapp})] / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

Añadiendo una unidad a cada miembro de la ecuación en vez de restarla, se llega a la fórmula de *Young*:

$$\cos D = -\cos(H_M + H_B) + (\cos H_M \cdot \cos H_B) \cdot (\cos D_{app} + \cos(H_{Mapp} + H_{Bapp})) / (\cos H_{Mapp} \cdot \cos H_{Bapp})$$

Procedimiento

La obtención de UT a partir de una distancia lunar comprende los siguientes pasos:

1.

Se mide la altura de la Luna en el limbo inferior o superior, según el que sea más visible y se anota la hora local de la observación $WT1_{LMapp}$. Se aplican las correcciones para el error de índice y de depresión en el horizonte (si fuese necesario) para obtener la altura aparente del limbo medido, $H1_{LMapp}$. Se repite el procedimiento con el astro de referencia a la hora local $WT1_{Bapp}$ y su altura $H1_{Bapp}$.

2.

Ahora se mide la distancia angular entre el limbo de la Luna y el astro de referencia, D_{Lapp} , anotando la hora local correspondiente, WT_D . El ángulo D_{Lapp} ha de ser medido con la mayor precisión posible. Es recomendable tomar varias medidas de D_{Lapp} y de sus correspondientes valores de WT_D en rápida sucesión y calcular el correspondiente valor medio. Cuando la Luna esta casi llena, no es demasiado fácil distinguir el limbo de su borde (línea de sombra). En general, el limbo tiene una apariencia muy nítida mientras el borde sombreado es menos determinable.

3.

Se miden las alturas de ambos astros de nuevo como se ha descrito anteriormente. Se registran las alturas medidas como $H2_{LMapp}$ y $H2_{Bapp}$, anotando también la correspondiente observación horaria de ambas, $WT2_{LMapp}$ y $WT2_{Bapp}$.

4.

Como las mediciones solo estarán separadas por unos pocos minutos, puede calcularse la altura de cada astro por interpolación para el mismo momento de la observación de la distancia lunar:

$$H_{LMapp} = H1_{LMapp} + (H2_{LMapp} - H1_{LMapp}) \cdot [(WT_D - WT1_{LMapp}) / (WT2_{LMapp} - WT1_{LMapp})]$$

$$H_{Bapp} = H1_{Bapp} + (H2_{Bapp} - H1_{Bapp}) \cdot [(WT_D - WT1_{Bapp}) / (WT2_{Bapp} - WT1_{Bapp})]$$

5.

Se corrige la altura aparente de la Luna y la distancia angular, DLapp mediante su semidiámetro aumentado, SDaug. Este último puede calcularse directamente a partir de la altura del limbo superior o inferior de la Luna:

$$\text{tang}SD_{aum} = 0,2725 / \sqrt{[-(\cos H_{LMapp} \pm 0,2725)^2 + 1 / (\text{seno}^2 HP_M)] - \text{seno} H_{LMapp}}$$

(Limbo superior: $[\cos H_{LMapp} - 0,2725]$; Limbo inferior: $[\cos H_{LMapp} + 0,2725]$)

La corrección de la altura :

$$\text{Limbo inferior : } H_{Mapp} = H_{LMapp} + SD_{aum}$$

$$\text{Limbo superior : } H_{Mapp} = H_{LMapp} - SD_{aum}$$

Los convenios para la corrección de las distancias lunares son:

Si el limbo lunar se encuentra en dirección al astro de referencia: $D_{app} = D_{Lapp} + SD_{aum}$

Si el limbo lunar se encuentra en dirección contraria al astro de referencia: $D_{app} = D_{Lapp} - SD_{aum}$

El procedimiento descrito arriba solo es una aproximación debido a que el semidiámetro aumentado es función de la altura corregida por refracción. Como la refracción tiene un valor muy pequeño y como el aumento total entre 0° - 90° de altura, es solamente de unos 0,3', el error resultante es muy pequeño y puede ser ignorado.

Cuando se elige el Sol como astro de referencia, éste requiere las mismas correcciones por Semidiámetro. Como el Sol no muestra un aumento medible, podemos utilizar el Semidiámetro geocéntrico, tabulado en el Almanaque Náutico u obtenido con el correspondiente programa de cálculo.

6.

Deben corregirse ambas alturas, H_{Mapp} y H_{Bapp}, por refracción atmosférica, R.

$$R_i ['] = (p[hPsc] / 1010) \cdot (283 / (T[^\circ C] + 273)) \cdot [(0,97127 / \text{tang} H_i) - (0,00137 / \text{tang}^3 H_i)]$$

R_i se resta de las respectivas alturas. La fórmula de la refracción sólo es exacta para alturas superiores a unos 10°. Alturas inferiores han de comprobarse siempre debido a que la refracción resultante puede resultar errática y a causa de que el disco aparente de la Luna (y también del Sol), adquieren una figura ovalada por una creciente diferencia de refracción para los limbos superiores e inferiores. Esta distorsión afecta al semidiámetro de forma complicada en su relación con el astro de referencia.

7.

Corrección de las alturas también por paralaje:

$$\text{seno } P_M = \text{seno } HP_M \cdot \cos (H_{Mapp} - R_{Mapp}); \quad \text{seno } P_B = \text{seno } HP_B \cdot \cos (H_{Bapp} - R_{Bapp})$$

El criterio de aplicación para las correcciones es el siguiente:

$$H_M = H_{Mapp} - R_{Mapp} + P_M \qquad H_B = H_{Bapp} - R_{Bapp} + P_B$$

La corrección por paralaje no se aplica a las alturas de una estrella fija ($HP_a = 0$).

8.

Mediante D_{app} , H_{Mapp} , H_M , H_{Bapp} y H_B , se calcula D, usando las fórmulas de *Dunthorne* o de *Young*.

9.

El horario correspondiente a la Distancia geocéntrica, D se determina por interpolación. Las Tablas de Distancias Lunares muestran D en función del horario, T (TU). Si el intervalo de variación de D no es muy significativo (inferior a unos 0,3' por cada 3 horas), puede aplicarse una interpolación lineal. Sin embargo, para determinar T, ha de considerarse T como una función de D (interpolación inversa).

$$T_D = T_1 + [(T_2 - T_1) \cdot (D - D_1) / (D_2 - D_1)]$$

T_D es el horario desconocido correspondiente a D. D_1 y D_2 son Distancias Lunares tabuladas. T_1 y T_2 son los horarios (TU) correspondientes ($T_2 = T_1 + 3h$). D es la Distancia Lunar geocéntrica, calculada a partir de D_{app} . D debe encontrarse entre D_1 y D_2 .

Si resulta considerable el intervalo de variación de D, se obtendrán resultados más exactos aplicando métodos de interpolación no lineal; por ejemplo, mediante "la interpolación de 3 puntos de Lagrange". Seleccionando tres pares de valores tabulados, (T_1, D_1) , (T_2, D_2) , y (T_3, D_3) , T_D se calcula de la manera siguiente:

$$T_D = T_1 \cdot [(D - D_2) \cdot (D - D_3) / (D_1 - D_2) \cdot (D_1 - D_3)] + T_2 \cdot [(D - D_1) \cdot (D - D_3) / (D_2 - D_1) \cdot (D_2 - D_3)] + T_3 \cdot [(D - D_1) \cdot (D - D_2) / (D_3 - D_1) \cdot (D_3 - D_2)]$$

$$T_2 = T_1 + 3h, \quad T_3 = T_2 + 3h; \quad D_1 < D_2 < D_3 \quad \text{o} \quad D_1 > D_2 > D_3$$

D puede tener cualquier valor entre D_1 y D_3 .

No tiene que haber un mínimo o un máximo de D durante el intervalo de tiempo $[T_1, T_3]$. Este problema no se presenta eligiendo un astro cercano, con un intervalo considerable de variación de D. Cerca de un valor mínimo o de uno máximo de D, $\Delta D / \Delta T$ debería ser muy pequeño y la observación es siempre errática.

Después de determinar T_D , puede calcularse el error del cronómetro, ΔT .

$$\Delta T = W T_D - T_D$$

ΔT es la diferencia entre la hora de nuestro reloj y el momento de la observación, WT_D , y la hora encontrada por interpolación, T_D . Restando del horario el error del cronómetro, WT queda expresado en TU.

$$TU = WT - \Delta T$$

Mejoras de Precisión

Los procedimientos descritos hasta ahora se refieren a una Tierra esférica. En cambio, la realidad es que la Tierra tiene aproximadamente la forma de un elipsoide, aplanado por los polos. Ello conduce a pequeños, pero medibles efectos cuando se observa la Luna, es decir el astro más cercano a la Tierra. En primer lugar, la paralaje en altura difiere ligeramente del valor calculado para una Tierra esférica. En segundo lugar, hay una pequeña paralaje en la medición del azimut que no se existiría si la Tierra fuese realmente una esfera perfecta (ver el capítulo 9). Si no se aplican correcciones por estas cuestiones, D puede contener un error de unos $0,2'$. Las fórmulas siguientes se refieren a un observador situado sobre la superficie del elipsoide de referencia (aproximadamente al nivel de la superficie del mar).

La corrección requiere conocer la latitud del observador, Lat , el azimut verdadero de la Luna, Az_M , y también el azimut verdadero del astro de referencia, Az_B .

Mientras las correcciones sean pequeñas, los tres valores no necesitan una gran precisión. Son tolerables los errores de algunos pocos grados. También puede emplearse la demora de aguja, corregida en cuanto a su declinación magnética, como azimut para cada astro.

Paralaje en la altura:

Esta corrección se aplica a la paralaje de la altura y se usa para calcular H_M con mayor precisión antes de calcular las distancias lunares.

$$\Delta P_M \approx f \cdot HP_M \cdot \left[\text{seno}(2 \cdot Lat) \cdot \cos Az_M \cdot \text{sen } H_{Mapp} - \text{seno}^2 Lat \cdot \cos H_{Mapp} \right]$$

$$f \text{ es el achatamiento de la tierra: } f = \frac{1}{298.257}$$

$$P_M, \text{ mejorado} = P_M + \Delta P_M$$

$$H_M = H_{Mapp} - R_{Mapp} + P_M, \text{ mejorado}$$

Paralaje en azimut:

La corrección de la paralaje en el azimut se aplica después del cálculo de H_M y D . La fórmula siguiente es una aproximación adecuada para el cálculo de la paralaje del azimut, ΔAZ_M :

$$\Delta AZ_M \approx f \cdot HP_M \cdot [\text{seno}(2 \cdot \text{Lat}) \cdot \text{seno} Az_M] / \cos H_M$$

Para valorar como afecta ΔAZ_M a D , retrocedemos a la fórmula del coseno:

$$\cos D = \text{sen} H_M \cdot \text{seno} H_B + \cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \cos \alpha$$

Diferenciamos la ecuación con respecto a α :

$$d(\cos D) / d\alpha = -\cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \text{seno} \alpha$$

$$d(\cos D) = -\cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \text{seno} \alpha \cdot d\alpha$$

$$d(\cos D) = -\text{seno} D \cdot dD$$

$$-\text{seno} D \cdot dD = -\cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \text{seno} \alpha \cdot d\alpha$$

$$dD = [\cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \text{seno} \alpha] / \text{seno} D \cdot d\alpha$$

Mientras $d = d Az_M$, el cambio en D causado por una alteración infinitesimal en Az_M :

$$dD = [\cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \text{seno} \alpha \cdot \Delta Az_M] / \text{seno} D$$

Con una pequeña, pero medible alteración en Az_M , tenemos:

$$\Delta D \approx [\cos H_M \cdot \cos H_B \cdot \text{seno} \alpha \cdot \Delta Az_M] / \text{seno} D$$

$$D_{\text{mejorada}} \approx D + \Delta D$$

Combinando las fórmulas de ΔAZ_M y ΔD , obtenemos:

$$D_{\text{mejorada}} \approx D + f \cdot HP_M \cdot [\cos H_B \cdot \text{seno}(2 \cdot \text{Lat}) \cdot \text{seno} Az_M \cdot \text{seno}(Az_M - Az_B)] / \text{seno} D$$

Exactitud

De acuerdo con las exigencias modernas, el método de las distancias lunares es horriblemente inexacto. En cambio, en los siglos XVIII y XIX, los resultados generalmente eran admisibles porque longitudes con un error entre $0,5^{\circ}$ - 1° eran mejores que no disponer de la longitud. Los errores citados es el resultado aproximado de un error de solo $1'$ en las medidas de D_{Lapp} , nada fuera de lo habitual en la lectura del sextante en las condiciones prácticas. Por ello, D_{Lapp} ha de medirse con gran cuidado.

La altura de ambos astros cualesquiera, requiere el mismo entorno en grados de exactitud. Mientras ambos errores se compensen entre si, el error resultante en D es relativamente pequeño. Un error de pocos minutos de arco en la altura es tolerable en la mayoría de las ocasiones. Por ello, midiendo dos alturas de cada astro y estableciendo la altura en el momento de la observación de la distancia lunar por interpolación no es absolutamente necesario. Midiendo una altura única década astro poco antes o después de efectuar la medición de la distancia lunar es suficiente si se acepta una pequeña pérdida de exactitud.

La posición del astro de referencia con respecto a la luna es crucial. La desviación standard de los valores de tiempo obtenidos por distancias lunares es inversamente proporcional al rango de cambio de D_{Lapp} . Mientras el plano de la órbita lunar forma un ángulo relativamente pequeño (unos 5°) con la eclíptica, astros brillantes son muy adecuados en las cercanías de la eclíptica (el sol, planetas, estrellas seleccionadas).

Las estrellas generalmente recomendadas para las mediciones de las distancias lunares son Aldebaran, Altair, Antares, Fomalhaut, Hamal, Markab, Pollux, Regulus y Spica, pero también otras estrellas cercanas a la eclíptica pueden usarse perfectamente, como por ejemplo, Nunki. Las Tablas de Distancias Lunares del Almanaque Náutico contienen sólo valores de la declinación para aquellos astros que tienen una posición favorable con respecto a la luna en el día de la observación. Si existen dudas, el navegante ha de comprobar el rango de cambio de la declinación. Se acercan a 0 cuando la declinación pasa por un mínimo o por un máximo, haciendo inútil una observación.

Ortos, Ocasos y Crepúsculos

Visibilidad general

Para planificar las observaciones, resulta útil saber durante cuánto tiempo un cierto astro está por encima del horizonte, así como las horas del orto y del ocaso del Sol y las de los crepúsculos.

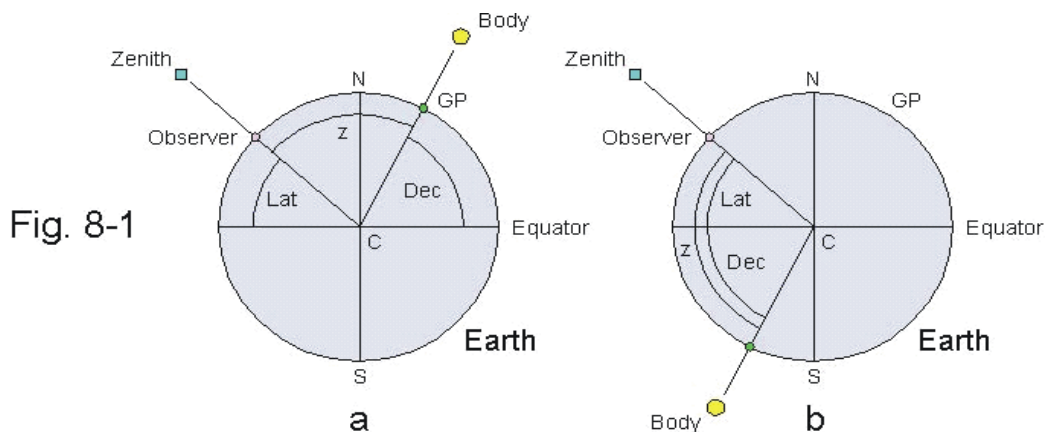
Un astro puede estar siempre por encima del horizonte, siempre por debajo, o por encima durante una parte del día, dependiendo de la latitud del observador y de la declinación del astro.

Un astro es **circumpolar** (siempre por encima del horizonte astronómico) si su distancia cenital es menor que 90° en el instante de paso por el meridiano **inferior**, p.ej., cuando el astro se encuentra en el meridiano inferior del lugar (Fig 8-1 a). Sería el caso de un astro en las siguientes condiciones:

$$| Lat + Dec | > 90^\circ$$

Un astro está siempre por debajo del horizonte astronómico si su distancia cenital es mayor que 90° en el instante de paso por el meridiano **superior** del lugar. La regla correspondiente es:

$$| Lat - Dec | > 90^\circ$$



Un cuerpo celeste que esté en el mismo hemisferio que el observador puede estar a veces por encima del horizonte o ser circumpolar. Un astro en el hemisferio opuesto puede estar a veces por encima del horizonte o ser anticircumpolar, pero nunca circumpolar.

El Sol proporciona un buen ejemplo de cómo la visibilidad de un astro se ve afectada por la latitud y la declinación. En el solsticio de verano ($Dec = +23.5^\circ$), el Sol es circumpolar para un observador situado al norte del **círculo polar ártico** ($Lat > 66.5^\circ$). Al mismo tiempo, el Sol está por debajo del horizonte astronómico todo el día si el observador está al sur del **círculo polar antártico** ($Lat < -66.5^\circ$). En los equinoccios ($Dec = 0^\circ$), el Sol es circumpolar sólo en los polos. En el solsticio de invierno ($Dec = -23.5^\circ$), el Sol es circumpolar al sur del círculo polar antártico e invisible al norte del círculo polar ártico. Si el observador está entre los círculos polares, El Sol es visible durante parte del día todo el año.

Ortos y Ocasos

Los sucesos de orto y ocaso se pueden utilizar para determinar la latitud, la longitud y la hora. Sin embargo no se pueden esperar resultados muy precisos porque la refracción atmosférica puede ser errática si el astro está en el horizonte o cerca de él.

El orto o el ocaso geométricos suceden cuando el centro del astro atraviesa el horizonte astronómico, ($H = 0^\circ$). Debido a la influencia de la refracción atmosférica, todos los astros excepto la Luna están en este instante por encima de los horizontes visible y sensible. La Luna no es visible en el instante de su orto o de su ocaso geométricos porque el efecto de depresión de la paralaje horizontal (-1°) es mayor que el efecto de elevación de la refracción atmosférica.

Las alturas aparentes aproximadas (referidas al horizonte sensible) en el instante de los ortos o de los ocasos astronómicos son:

Sol (limbo inferior)	15'
Estrellas	29'
Planetas	29' – HP

Si medimos estas alturas referidas al horizonte de la mar, hemos de añadir la depresión del horizonte (capítulo 2) a los valores anteriores. Por ejemplo, la altura del Limbo inferior del Sol naciente o poniente es aproximadamente 20' si el ojo del observador tiene una elevación de 8 m.

A partir de la conocida fórmula de la altura (ver capítulo 4):

$$\sin H = \sin Lat \cdot \sin Dec + \cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \cos t$$

$$\cos t = - \frac{\sin Lat \cdot \sin Dec}{\cos Lat \cdot \cos Dec}$$

Resolviendo la ecuación para el ángulo horario, tenemos:

$$t = \arccos (- \tan Lat \cdot \tan Dec)$$

Esta ecuación no tiene solución si el argumento del arco coseno es menor que -1 o mayor que $+1$. En el primer caso el astro es **circumpolar**, en el segundo caso está siempre por debajo del horizonte. En los otros casos la función arco coseno nos da valores entre 0° y 180° .

Debido a la ambigüedad de la función arco coseno, la ecuación tiene dos soluciones, una para el orto y otra para el ocaso. En los cálculos siguientes, se han de observar los siguientes convenios:

Si el astro está en el **orto** (al este del observador), t es una cantidad **negativa**.

Si el astro está en el **ocaso** (al oeste del observador), t es una cantidad **positiva**.

Si conocemos nuestra latitud y la hora del orto o del ocaso, podemos calcular nuestra longitud:

$$Lon = \pm t - GHA$$

GHA es el ángulo horario del astro en Greenwich en el instante del orto o del ocaso. El signo de t se ha de evaluar con cuidado (vid supra). Si la longitud es menor que -180° , tendremos que añadir 360° .

Conocida nuestra situación podemos calcular las horas de salida y puesta del Sol:

$$GMT_{\text{salida/puesta}} = 12 \pm \frac{t \left[\square \right]}{15} - \frac{Lon \left[\square \right]}{15} - E_{OT}$$

Las horas de orto y de ocaso que se obtienen con la fórmula anterior no son muy precisas ya que Dec y E_{OT} son variables. Como no conocemos la hora exacta del orto o del ocaso al principio hemos de utilizar inicialmente valores estimados para Dec y E_{OT}. Las horas del orto o del ocaso se pueden mejorar por iteración (repetiendo los cálculos con Dec y E_{OT} calculadas a la hora del orto o del ocaso). Además las horas así calculadas están afectadas por irregularidades de la refracción atmosférica cerca del horizonte. De esta forma no es inusual un error en la hora de ± 2 minutos.

Así podemos calcular nuestra longitud a partir de la hora de salida o puesta del Sol si conocemos nuestra latitud:

$$Lon[^\circ] = \pm t + 15 \cdot (12 - GMT_{\text{salida/puesta}} - E_{OT})$$

De nuevo no es un método demasiado preciso y no es de extrañar un error de varios minutos de arco en la longitud:

Conocida nuestra longitud, podemos determinar nuestra latitud aproximada a partir de la hora de salida o puesta del Sol:

$$t [^\circ] = Lon[^\circ] - 15 \cdot (12 - GMT_{\text{salida/puesta}} - E_{OT})$$

$$Lat \left[\square \right] = \arctan \left(- \frac{\cos t}{\tan Dec} \right)$$

En náutica el orto y el ocaso se definen como el instante en qué el limbo superior del astro está en el horizonte visible. Estos sucesos pueden observarse sin sextante. En este caso hemos de tomar en consideración los efectos de refracción, paralaje horizontal, depresión y semidiámetro. Estas cantidades determinan las alturas del astro (H_0) en función del horizonte astronómico en el instante del orto o del ocaso aparentes.

$$t = \arccos \frac{\sin H_0 - \sin Lat \cdot \sin Dec}{\cos Lat \cdot \cos Dec}$$

$$H_0 = HP - SD - R_H - Dip$$

Según el Almanaque Náutico, la refracción para un astro en el horizonte sensible R_H es aproximadamente (!) de 34'

Si se observa el limbo superior del Sol se tiene:

$$H_0 = 0,15' - 16' - 34' - Dip = - 50' - Dip$$

H_0 es negativa. Si nos referimos al limbo superior y al horizonte sensible ($Dip = 0$), el ángulo horario, en el instante de salida o de puesta del Sol es:

$$t = \arccos \frac{-0,0145 - \sin Lat \cdot \sin Dec}{\cos Lat \cdot \cos Dec}$$

Acimut y Amplitud

El acimut de un astro en el orto o el ocaso se calcula a partir de la fórmula del acimut (ver Capítulo 4)

$$Az = \arccos \frac{\sin Dec - \sin H \cdot \sin Lat}{\cos H \cdot \cos Lat}$$

Si $H = 0$ tenemos:

$$Az = \arccos \frac{\sin Dec}{\cos Lat}$$

Az es $+90^\circ$ (orto) y -90° (ocaso) si la declinación del astro es cero, independientemente de la latitud del observador. Así es Sol sale por el este y se pone por el oeste en los equinoccios (salida y puesta geométricas).

Si $H_{\text{centro}} = -50'$ (limbo superior del Sol en el horizonte sensible), tenemos:

$$Az = \arccos \frac{\sin Dec + 0.0145 \sin Lat}{0.9999 \cos Lat}$$

El acimut verdadero del orto o del ocaso de un astro dado es:

$$Az_N \begin{cases} Az & \text{si } t < 0 \\ 360^\circ - Az & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

El acimut de un astro en el instante del orto o del ocaso se usa para hallar la declinación magnética en la situación del observador (compararlo con el capítulo 13).

La distancia angular horizontal del punto del orto /del ocaso con el punto este / oeste del horizonte se llama **amplitud** y se puede calcular a partir del acimut. Una amplitud E 45° N, por ejemplo, significa que el astro sale por el horizonte 45° al norte del punto cardinal este.

Crepúsculos

En la mar, el crepúsculo es importante para observar estrellas y planetas, porque es el único periodo de tiempo en que son visibles estos astros y el horizonte. Por definición hay tres tipos de crepúsculos. La altura H está referida al centro del Sol y al horizonte astronómico y marca el principio (por la mañana) y el final (por la tarde) del respectivo crepúsculo.

Crepúsculo civil H = -6°

Crepúsculo náutico H = -12°

Crepúsculo astronómico H = -18°

En general se recomienda una altura entre -3° y -9° para efectuar observaciones astronómicas en la mar (mejor visibilidad de las estrellas más brillantes y del horizonte de la mar). A pesar de ello son posibles las excepciones a esta regla, dependiendo de las condiciones meteorológicas del momento.

El ángulo horario del Sol a una altura de -6° (para su centro) es:

$$t = \arccos \frac{-0.10453 - \sin Lat \cdot \sin Dec}{\cos Lat \cdot \cos Dec}$$

Utilizando esta fórmula, podemos hallar la hora aproximada para nuestra observación (por analogía con la salida y puesta del Sol)

Como se ha mencionado anteriormente, la observación simultánea de las estrellas y del horizonte sólo es posible durante un intervalo de tiempo limitado.

Para calcular el intervalo ΔT se usa la fórmula de la altura, diferenciando $\sin H$ del ángulo horario.

$$\frac{d(\sin H)}{dt} = -\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t$$

$$d(\sin Lat) = -\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t \, dt$$

Sustituyendo $d(\sin H)$ por $\cos H \cdot dH$ y despejando dt :

$$dt = -\frac{\cos H}{\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t} dH$$

Con $H = -6^\circ$ y $dH = 6^\circ$ ($H = -3^\circ$ a -9°), tenemos:

$$\Delta t \approx -\frac{5.97}{\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t}$$

Convirtiendo el incremento de ángulo horario a intervalo de tiempo (medido en minutos) e ignorando el signo, la ecuación es:

$$\Delta T [m] \approx \frac{24}{\cos Lat \cdot \cos Dec \cdot \sin t}$$

El intervalo de tiempo menor posible para hacer observaciones ($Lat = 0^\circ$, $Dec = 0^\circ$, $t = 96^\circ$) dura aproximadamente 24 minutos. Cuando el observador se desplaza hacia el norte o hacia el sur del ecuador, $\cos Lat$ y $\sin t$ disminuyen ($t > 90^\circ$). En consecuencia, la duración del crepúsculo aumenta. Cuando t es 0° o 180° , ΔT se hace infinito.

Ello está en concordancia con el consabido hecho que el crepúsculo es más corto en las regiones ecuatoriales y más largo en las regiones polares.

Se obtiene el mismo resultado cuando se calcula t para $H = -3^\circ$ y $H = -9^\circ$, respectivamente

$$\Delta T [m] = 4 \cdot (t_{-9^\circ} [^\circ] - t_{-3^\circ} [^\circ])$$

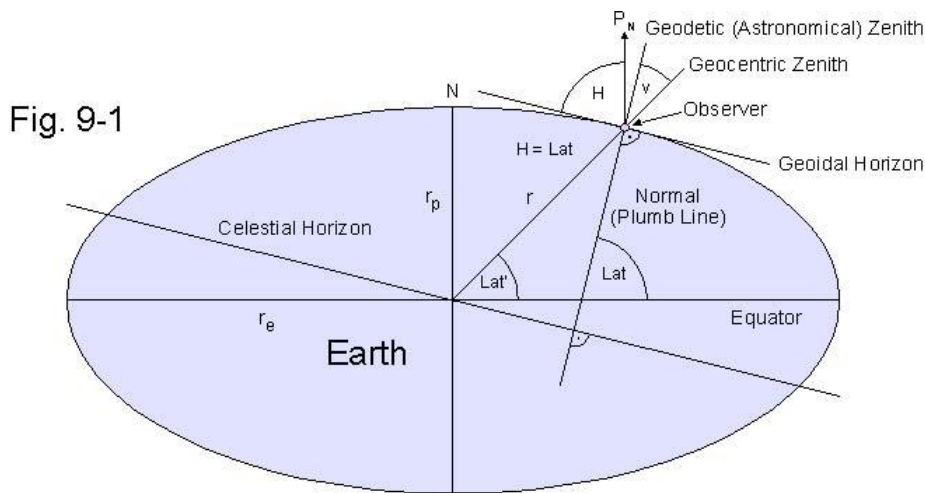
El Almanaque Náutico da los valores tabulados para las horas de salida y de puesta del Sol y para los crepúsculos civil y náutico para latitudes entre -60° y $+72^\circ$ (referidos a un observador en el meridiano de Greenwich). También se dan las horas de salida y puesta de la Luna.

Aspectos Geodésicos de la Navegación Astronómica

El Elipsoide

La navegación astronómica se basa en el supuesto que la Tierra es una esfera, y en consecuencia, en las leyes de la trigonometría esférica. En realidad, la forma de la Tierra, es más bien irregular y se aproxima a un **esferoide oblato** (elipsoide) como resultado de dos fuerzas, **la gravitatoria y la centrífuga** actuando sobre el cuerpo viscoso de la Tierra. Mientras la fuerza gravitatoria sola forzaría a la Tierra a tener forma esférica, estado de mínima energía, la fuerza centrífuga, debida a la rotación de la Tierra, la contrae a lo largo de su eje de rotación (eje polar) y la ensancha en el plano del ecuador. El vector local, suma de ambas fuerzas se denomina **gravedad**.

Se usan diferentes elipsoides para describir la forma de la Tierra, por ejemplo el del **Sistema Geodésico Mundial (WGS)** de 1984. **Las siguientes consideraciones se refieren al modelo de elipsoide que basta para la mayoría de casos en navegación.** La Fig. 9-1 muestra una sección meridiana de dicho elipsoide.



Datos de la Tierra elipsoide WGS 84)

Radio ecuatorial	r_e	6378137,0 m
Radio polar	r_p	6356752,3142 m
Achatamiento	$f = (r_e - r_p) / r_e$	1/298,25722

Debido al achatamiento de la Tierra se ha de distinguir entre latitud **geodésica** y **geocéntrica** que serían iguales si la Tierra fuese esférica. La latitud geodésica de un lugar, Lat , es el ángulo formado por la normal local (perpendicular) a la superficie del elipsoide de referencia con el plano del ecuador. La latitud geocéntrica, Lat' , es el ángulo formado por el radio vector local con el plano del ecuador. Las latitudes geodésica y geocéntrica están relacionadas como sigue:

$$\tan Lat' = (1 - f)^2 \cdot \tan Lat$$

Las latitudes geodésica y geocéntrica coinciden en los polos y en el ecuador. En cualquier otro lugar la latitud geocéntrica Lat' , es menor que la geodésica, Lat . Al igual que en el modelo de Tierra esférica, las longitudes geodésica y geocéntrica coinciden. Los mapas se basan siempre en las **coordenadas geodésicas**. Estas suelen denominarse también **coordenadas geográficas**.

En lo que sigue discutiremos los efectos del achatamiento de la Tierra en la navegación astronómica. Las distancias cenitales (y las alturas) medidas por el navegante siempre se refieren a la vertical del lugar, alineada con la gravedad, y que se dirige al **cenit astronómico**. Incluso el horizonte de la mar está relacionado con el cenit astronómico ya que la superficie del agua es perpendicular a la vertical del lugar.

Si la distribución de masas del elipsoide fuese uniforme, la vertical coincidiría con la normal local al elipsoide que señala al cenit geodésico. Así, en este caso, el cenit geodésico y el astronómico coinciden.

El **cenit geocéntrico** se define como el punto en que la prolongación del radio vector local de la Tierra interseca la esfera celeste. La distancia angular entre el cenit geodésico y el cenit geocéntrico se llama **desviación de la vertical, v**. La desviación de la vertical es función de la latitud geodésica. La fórmula siguiente fue propuesta por Smart [9].

$$v ["] = 692.666 \cdot \sin (2 \cdot Lat) - 1.163 \cdot \sin (4 \cdot Lat) + 0,026 \cdot \sin (6 \cdot Lat)$$

Los coeficientes de la fórmula anterior se refieren a las proporciones del elipsoide WGS 84.

La desviación de la vertical de un lugar dado, es la diferencia entre la latitud geodésica y la geocéntrica (*Fig. 9-1*)

$$v = Lat - Lat'$$

El valor máximo de v se da a 45° de latitud geográfica y es aproximadamente $11.5'$. Así la latitud geocéntrica de un observador a 45° de latitud geodésica es sólo $44^\circ 48.5'$. Esta diferencia no es despreciable. No obstante, el navegante ha de saber si las coordenadas de un punto, obtenidas por observaciones astronómicas son geodésicas o geocéntricas. Las alturas se miden con respecto al horizonte de la mar o a un horizonte artificial. Ambos se relacionan con la vertical del lugar, que apunta al cenit geodésico (astronómico). Así, este último es la única referencia disponible para el navegante. Como se muestra en la *Fig.9-1*, la altura del polo norte celeste P_N , (altura corregida de la Polar) respecto al horizonte del geode, es igual a la latitud geodésica, no a la geocéntrica. Una latitud al mediodía, que es suma o diferencia de la declinación (geocéntrica) y la distancia cenital respecto del cenit geodésico nos da el mismo resultado.

Suponiendo una distribución uniforme de masas en (el elipsoide de) la Tierra, las latitudes obtenidas por observaciones astronómicas son latitudes geodésicas ya que el navegante mide alturas respecto del cenit geodésico local (directa o indirectamente).

Es de la máxima importancia saber si el achatamiento de la Tierra causa errores significativos debido a hecho que los cálculos de navegación astronómica se hacen en un modelo de Tierra esférica. De acuerdo con los valores anteriormente dados de los radios polar y ecuatorial, la distancia de $1'$ en un círculo máximo es de 1.849 km en los polos y 1.855 km en el ecuador. Esta pequeña diferencia no ha de dar un error significativo en el trazado de líneas de posición. Por lo tanto es suficiente hacer servir el valor medio adoptado (1 milla \approx 1.852 km). No obstante, cuando se calcula la distancia ortodrómica (ver capítulo 11) entre dos lugares alejados miles de millas náuticas, el error causado por el achatamiento de la Tierra, puede ser de varias millas náuticas. Si se requiere una precisión extraordinaria, se pueden usar las fórmulas para la distancia geodésica dadas en [2]. Una **línea geodésica** es la menor distancia entre dos puntos de la superficie del elipsoide. En la superficie de una esfera una geodésica es un arco de círculo máximo.

La Paralaje de la Luna

Debido al achatamiento de la Tierra, la distancia entre el horizonte geoidal y el astronómico no es constante pero podemos suponer un valor entre r_p y r_e dependiendo de la latitud del observador. Esto tiene un efecto que se puede medir en la paralaje de la Luna ya que los valores tabulados de HP se refieren al radio ecuatorial r_e . La paralaje lunar se ve muy afectada por el desplazamiento de la vertical respecto del centro de la Tierra. Se ha dado en el capítulo 2 una fórmula de corrección que compensa ambos efectos. La asimetría de la vertical respecto del centro de la Tierra causa incluso una pequeña paralaje (despreciable) en acimut excepto cuando la Luna está en el meridiano local. En lo que sigue, calcularemos los efectos del achatamiento de la Tierra en la paralaje de la Luna con las fórmulas exactas de la astronomía esférica [9]. Para la navegación práctica, las fórmulas simplificadas dadas en el Capítulo 2 son suficientemente precisas.

La Fig. 9-2 muestra una proyección del cenit astronómico Z_a , el cenit geocéntrico Z_c y la posición geográfica de la Luna M , en la **esfera celeste**, una esfera hueca imaginaria de diámetro infinito con centro en la Tierra.

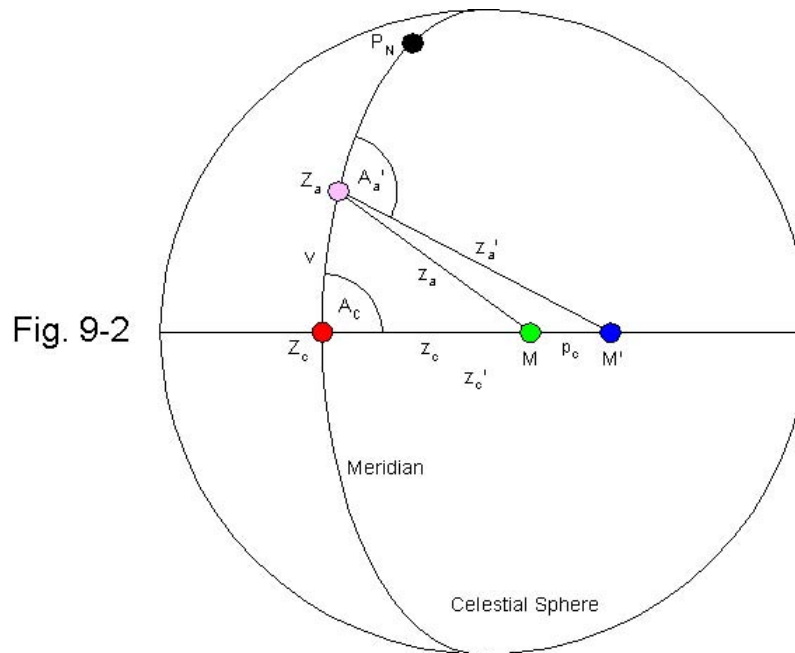


Fig. 9-2

El cenit geocéntrico Z_c , es el punto en que la recta que pasa por el centro de la Tierra y por el lugar de observación, corta a la esfera celeste. El cenit astronómico Z_a es el punto en que la vertical por la posición del observador interseca a la esfera celeste. Z_a y Z_c están en el mismo meridiano. M es la proyección geocéntrica de la posición de la Luna definida por su horario en Greenwich y su declinación. Por desgracia, la posición de un astro definida por GHA y Dec se designa comúnmente posición geográfica (ver capítulo 3) a pesar que GHA y Dec son coordenadas geocéntricas. M' es el punto dónde la recta desde el observador hasta el centro de la Luna corta a la esfera celeste. Z_c , M y M' están en un círculo máximo. La distancia cenital medida por el observador es z_a' porque el cenit astronómico es la referencia asequible. La cantidad que queremos saber es z_a , distancia cenital corregida por paralaje en altura. Es la distancia angular entre la Luna y el cenit astronómico medida por un observador ficticio situado en el centro de la Tierra.

Conocemos v , A_a' y z_a' . Al contrario que el astrónomo, el navegante no puede medir habitualmente A_a' de forma precisa. En navegación, el acimut calculado (ver capítulo 4) se puede sustituir por A_a' .

Tenemos tres triángulos esféricos, Z_a, Z_c, M' ; Z_a, Z_c, M y Z_a, M, M' . Primero se calcula z_c' a partir de z_a' , v y A_a' por la **ley de los cosenos referida a los lados** (ver capítulo 10):

$$\cos z_c' = \cos z_a' \cdot \cos v + \sin z_a' \cdot \sin v \cdot \cos (189 - A_a')$$

$$z_c' = \arccos (\cos z_a' \cdot \cos v - \sin z_a' \cdot \sin v \cdot \cos A_a')$$

Para obtener z_c , hemos de calcular previamente la longitud relativa ($r_e = 1$) del radio vector, r , y de la paralaje geocéntrica p_c .

$$p_c = \arcsin (\rho \cdot \sin HP \cdot \sin z_c')$$

$$\rho = \frac{r}{r_e} = \sqrt{\frac{1 - (2e^2 - e^4) \cdot \sin^2 Lat}{1 - e^2 \sin^2 Lat}} \quad e^2 = 1 - \frac{r_p^2}{r_e^2}$$

Donde HP es la paralaje horizontal ecuatorial de la Luna.

La distancia cenital geocéntrica corregida de paralaje es:

$$z_c = z_c' - p_c$$

Utilizando otra vez la fórmula del coseno, calculamos A_c , el acimut de la Luna respecto del cenit geocéntrico:

$$A_c = \arccos \frac{\cos z_a' - \cos z_c' \cdot \cos v}{\sin z_a' \cdot \sin v}$$

La distancia cenital astronómica corregida de paralaje es:

$$z_a = \arccos (\cos z_c \cdot \cos v + \sin z_c \cdot \sin v \cdot \cos A_c)$$

Así la **paralaje en altura** (astronómica) es:

$$PA = z_a' - z_a$$

En navegación no se necesitan las fórmulas exactas de la trigonometría esférica, y así la corrección dada en el Capítulo 2 es suficientemente precisa.

El pequeño ángulo entre M y M' medido en Z_a , es la **paralaje en acimut**, p_{az} :

$$p_{az} = \arccos \frac{\cos p_c - \cos z_a \cdot \cos z_a'}{\sin z_a \cdot \sin z_a'}$$

Se ha de aplicar siempre la corrección para p_{az} a fin de aumentar el ángulo formado por el acimut y el meridiano local. Por ejemplo, si AZ_N es 315° , p_{az} se ha de restar, y p_{az} se ha de sumar si AZ_N es 225° .

Hay una fórmula sencilla para calcular la paralaje en acimut de forma aproximada:

$$p_{az} = f \cdot HP \cdot \frac{\sin (2 \cdot Lat) \cdot \sin AZ_N}{\cos H_c}$$

Esta fórmula da siempre el signo correcto para p_{az} , y sólo hay que sumar p_{az} a AZ_N .

La paralaje en acimut se anula cuando la Luna está en el meridiano local y es máxima cuando está al este o al oeste del observador. Es bastante mayor a latitudes medias (45°) y cero cuando el observador está en no de los polos o en el ecuador ($v = 0$). Usualmente, la paralaje en acimut es sólo una fracción de minuto de arco y, en consecuencia, despreciable en navegación astronómica. De esta forma la paralaje en acimut aumenta al disminuir la distancia cenital.

Los otros cuerpos celestes no requieren corrección por achatamiento de la Tierra ya que sus paralajes son muy pequeñas comparadas con la paralaje de la Luna.

El Geoide

La Tierra no es **exactamente** un elipsoide oblato. La forma de la Tierra se describe adecuadamente como un **geoide**, que es una superficie equipotencial de gravedad.

El geoide tiene elevaciones y depresiones causadas por los accidentes geográficos y una distribución no uniforme de masas (materiales con diferente densidad). Las elevaciones son acumulaciones locales de materia (montañas o depósitos minerales) y las depresiones deficiencias locales de materia (valles, lagos, grutas). La s elevación o depresión de cada punto del geoide, respecto del elipsoide de referencia se encuentran por medidas de la gravedad.

En la pendiente de una elevación o depresión del geoide, la vertical (la normal al geoide) no coincide con la normal al elipsoide de referencia y el cenit astronómico difiere del geodésico. Así una **posición astronómica** (obtenida por observaciones astronómicas no corregidas) puede diferir ligeramente de la posición geodésica. El pequeño ángulo formado por la vertical y la normal al elipsoide de referencia se llama **desviación de la vertical**. Normalmente este ángulo es menor que un minuto de arco, pero de ha informado de desviaciones de la vertical mayores, per ejemplo en aguas costeras cercanas a montañas altas.

La desviación local de la vertical se puede expresar por medio de una componente en latitud y otra en longitud. Una situación hallada por observación astronómica se ha de corregir por ambas cantidades para tener la posición geodésica (geográfica). El error en la situación debido a la desviación local de la vertical, normalmente no es importante en navegación astronómica pero sí puede serlo en topografía y planimetría, donde se requiere un grado de precisión mucho mayor.

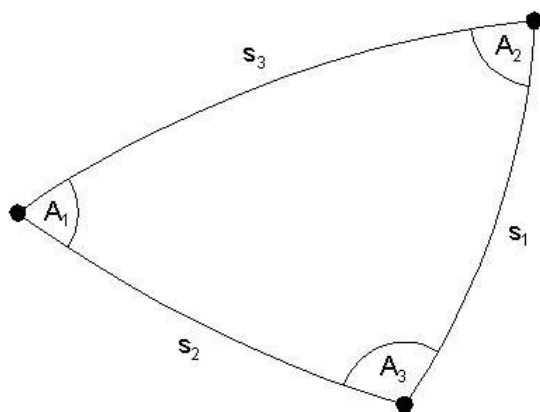
Trigonometría Esférica

La Tierra se considera, en la navegación astronómica, habitualmente como una esfera. Aunque un esferoide oblicuo sería una aproximación más precisa, en este caso, los cálculos de navegación correspondientes resultarían demasiado dificultosos para una aplicación práctica. Los errores que se cometen utilizando el modelo de esfera para el globo terráqueo son muy pequeños y permanecen en el entorno de una desviación estadísticamente aceptable, en el que se incluyen, además otro tipo de errores siempre presentes como una refracción anormal, el redondeo, etc. Es posible gestionar cálculos de navegación con solo la ayuda de tablas (H.O. 229, H.O. 211, etc.) y con matemáticas elementales. Pero los principios de la navegación astronómica no pueden ser comprendidos sin conocimientos concretos sobre los elementos que definen la trigonometría esférica.

El Triángulo Esférico Oblicuo

Como todo triángulo, también un triángulo esférico se caracteriza por sus tres lados y tres ángulos. Pero un triángulo esférico es parte de la superficie de una esfera y sus lados no son líneas rectas sino arcos de círculos máximos (Fig.10-1).

Fig. 10-1



Un **círculo máximo** es una circunferencia sobre la superficie de una esfera cuyo plano pasa por el centro de la misma (véase el Capítulo 3).

Todos los lados de un triángulo esférico pueden considerarse a su vez como ángulos, es decir se trata de la distancia angular entre sus vértices adyacentes, medidos desde el centro de la esfera. Las interrelaciones entre ángulos y lados de un triángulo esférico se describen por la **ley de senos y cosenos** para los lados de un triángulo: la **ley de cosenos para ángulos**, **Analogías de Napier** y en las **fórmulas de Gauss** (independientemente de otras fórmulas).

Ley de los senos:

$$\frac{\text{sen } A_1}{\text{sen } s_1} = \frac{\text{sen } A_2}{\text{sen } s_2} = \frac{\text{sen } A_3}{\text{sen } s_3}$$

Ley de los cosenos para los lados de un triángulo esférico:

$$\cos s_1 = \cos s_2 \cdot \cos s_3 + \sin s_2 \cdot \sin s_3 \cdot \cos A_1$$

$$\cos s_2 = \cos s_1 \cdot \cos s_3 + \sin s_1 \cdot \sin s_3 \cdot \cos A_2$$

$$\cos s_3 = \cos s_1 \cdot \cos s_2 + \sin s_1 \cdot \sin s_2 \cdot \cos A_3$$

Ley de los cosenos para los ángulos de un triángulo esférico:

$$\cos A_1 = -\cos A_2 \cdot \cos A_3 + \sin A_2 \cdot \sin A_3 \cdot \cos s_1$$

$$\cos A_2 = -\cos A_1 \cdot \cos A_3 + \sin A_1 \cdot \sin A_3 \cdot \cos s_2$$

$$\cos A_3 = -\cos A_1 \cdot \cos A_2 + \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \cos s_3$$

Igualdades de Napier:

$$\operatorname{tang} \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{A_3}{2} = \frac{\cos \frac{s_1 - s_2}{2}}{\cos \frac{s_1 + s_2}{2}} ; \quad \operatorname{tang} \frac{A_1 - A_2}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{A_3}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{s_1 - s_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{s_1 + s_2}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{s_1 + s_2}{2}}{\operatorname{tang} \frac{s_3}{2}} = \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}} ; \quad \frac{\operatorname{tang} \frac{s_1 - s_2}{2}}{\operatorname{tang} \frac{s_3}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A_1 - A_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A_1 + A_2}{2}}$$

Fórmulas de Gauss:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A_1 + A_2}{2}}{\cos \frac{A_3}{2}} = \frac{\cos \frac{s_1 - s_2}{2}}{\cos \frac{s_3}{2}} ; \quad \frac{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A_3}{2}} = \frac{\cos \frac{s_1 + s_2}{2}}{\cos \frac{s_3}{2}}$$

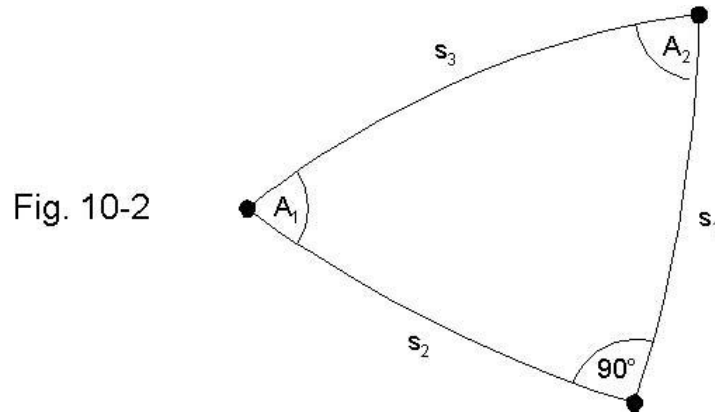
$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_3}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{s_1 - s_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{s_3}{2}} ; \quad \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A_3}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{s_1 + s_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{s_3}{2}}$$

Estas fórmulas y otras, derivadas de ellas, permiten calcular el valor de los ángulos, o de los lados, de un triángulo esférico si se conocen cualquiera de las otras tres dimensiones.

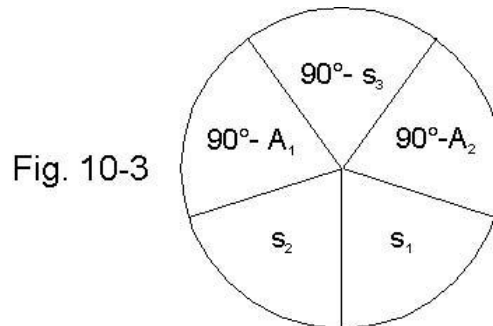
Particularmente, la ley de los cosenos aplicada a la resolución de los lados del triángulo, resulta de especial interés para los cálculos de navegación.

El Triángulo Esférico Rectángulo

La resolución de un triángulo esférico es menos complicada cuando aquel contiene un ángulo rectángulo (Fig. 10-2). Utilizando las **ecuaciones de Napier para fracciones circulares**, puede calcularse cualquier parámetro aunque se conozcan solo dos de las restantes dimensiones (además del ángulo recto).



Colocamos los lados que forman el ángulo recto (s_1, s_2) y los complementarios de los otros dos (A_1, A_2) y del lado opuesto (s_3) en forma de un diagrama circular con cinco sectores llamados “fracciones” (en el mismo orden secuencial como se suceden en el triángulo original). El ángulo recto se omite (Fig.10-3).



De acuerdo con las ecuaciones de Napier, el seno de cualquiera de los componentes del diagrama es igual al producto de las tangentes de las fracciones adyacentes más el producto de los cosenos de sus fracciones opuestas:

$$\begin{aligned} \text{sen } s_1 &= \text{tang } s_2 \cdot \text{tang } (90^\circ - A_2) = \cos (90^\circ - A_1) \cdot \cos (90^\circ - s_3) \\ \text{sen } s_2 &= \text{tang } (90^\circ - A_1) \cdot \text{tang } s_1 = \cos (90^\circ - s_3) \cdot \cos (90^\circ - A_2) \\ \text{sen } (90^\circ - A_1) &= \text{tang } (90^\circ - s_3) \cdot \text{tang } s_2 = \cos (90^\circ - A_2) \cdot \cos s_1 \\ \text{sen } (90^\circ - s_3) &= \text{tang } (90^\circ - A_2) \cdot \text{tang } (90^\circ - A_1) = \cos s_1 \cdot \cos s_2 \\ \text{sen } (90^\circ - A_2) &= \text{tang } s_1 \cdot \text{tang } (90^\circ - s_3) = \cos s_2 \cdot \cos (90^\circ - A_1) \end{aligned}$$

De forma más simple, estas ecuaciones pueden representarse de la siguiente manera:

$$\text{sen } s_1 = \text{tang } s_2 \cdot \text{cotg } A_2 = \text{sen } A_1 \cdot \text{sen } s_3$$

$$\text{sen } s_2 = \text{cotg } A_1 \cdot \text{tang } s_1 = \text{sen } s_3 \cdot \text{sen } A_2$$

$$\text{cos } A_1 = \text{cotg } s_3 \cdot \text{tang } s_2 = \text{sen } A_2 \cdot \text{cos } s_1$$

$$\text{cos } s_3 = \text{cotg } A_2 \cdot \text{cotg } A_1 = \text{cos } s_1 \cdot \text{cos } s_2$$

$$\text{cos } A_2 = \text{tang } s_1 \cdot \text{cotg } s_3 = \text{cos } s_2 \cdot \text{sen } A_1$$

Hay diversas aplicaciones para el triángulo esférico rectángulo en navegación en general. Por ejemplo, las tablas de reducción de Ageton , (Capítulo 11). También se aplica en navegación ortodrómica (a lo largo de un círculo máximo), como se cita en el capítulo 13.

El triángulo Náutico de Posición

El triángulo náutico (generalmente oblicuo) es un triángulo esférico sobre la superficie terrestre formado por el polo norte N, la situación estimada del observador, AP y el polo de iluminación del astro GP, en el instante de la observación (Fig. 11-1). Todos los procedimientos para hallar una situación observada se basan en este triángulo de posición.

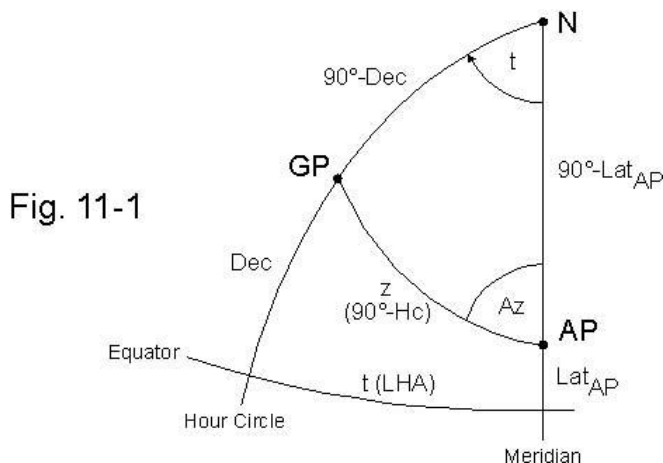


Fig. 11-1

Cuando se usa el método del determinante, el observador conoce la latitud de la situación estimada Lat_{AP} , la declinación del astro observado Dec , y el ángulo en el polo t o el ángulo horario LHA (calculado a partir de la longitud estimada de AP y GHA del astro).

El primer paso consiste en calcular el lado z del triángulo náutico de posición usando la ley de los cosenos para los lados:

$$\cos z = \cos (90^\circ - Lat_{AP}) \cdot \cos (90^\circ - Dec) + \sin (90^\circ - Lat_{AP}) \cdot \sin (90^\circ - Dec) \cdot \cos t$$

Como $\cos (90^\circ - x)$ es igual a $\sin x$ y viceversa, esta ecuación se puede volver a escribir como:

$$\cos z = \sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec + \cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec \cdot \cos t$$

El lado z no sólo es un **círculo máximo** sino también la **distancia cenital** del cuerpo celeste y el radio del **círculo de alturas iguales** (ver capítulo 1)

Sustituyendo z por la altura H :

$$\sin H = \sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec + \cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec \cos t$$

Y despejando H tenemos la conocida fórmula de la altura del capítulo 4

$$H = \arcsin (\sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec + \cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec \cos t)$$

La altura así obtenida para una situación dada se llama **altura estimada calculada**, H_c

El acimut del astro observado también se calcula por la fórmula de los cosenos para los lados del triángulo:

$$\cos (90^\circ - Dec) = \cos (90^\circ - Lat_{AP}) \cdot \cos z + \sin (90^\circ - Lat_{AP}) \sin z \cdot \cos Az$$

$$\sin Dec = \sin Lat_{AP} \cdot \cos z + \cos Lat_{AP} \cdot \sin z \cdot \cos Az$$

Sustituyendo la distancia cenital por la altura estimada, tenemos la ecuación siguiente:

$$\sin Dec = \sin Lat_{AP} \cdot \sin H_c + \cos Lat_{AP} \cdot \cos H_c \cdot \cos Az$$

Despejando finalmente Az, se obtiene la fórmula del capítulo 4

$$Az = \arccos \frac{\sin Dec - \sin Lat_{AP} \cdot \sin H_c}{\cos Lat_{AP} \cdot \cos H_c}$$

El acimut resultante ha de estar comprendido entre 0° y 180° y por tanto no necesariamente es idéntico al acimut verdadero Az_N ($0^\circ \dots 360^\circ$ en sentido horario desde el norte) usado habitualmente en navegación. En todos los casos en que t es negativo (GP al este de AP), Az es igual a Az_N , en otro caso (t positivo, GP al oeste de AP como muestra la Fig. 11-1) Az_N se obtiene restando Az de 360° .

Cuando se usa el método de *Summer*, los datos conocidos son Dec y Lat_{AP} (la latitud estimada) y se mide z (o H). El ángulo en el polo t (o el horario local LHA) es la incógnita.

Aplicando otra vez la ley de los cosenos:

$$\cos z = \cos (90^\circ - Lat_{AP}) \cdot \cos (90^\circ - Dec) + \sin (90^\circ - Lat_{AP}) \cdot \sin (90^\circ - Dec) \cdot \cos t$$

$$\sin H = \sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec + \cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec \cos t$$

$$\cos t = \frac{\sin H - \sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec}{\cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec}$$

$$t = \arccos \frac{\sin H - \sin Lat_{AP} \cdot \sin Dec}{\cos Lat_{AP} \cdot \cos Dec}$$

El ángulo en el polo t (o el horario local LHA) así obtenido se utiliza como se explica en los capítulos 4 y también 5.

Cuando se observa un astro en el instante de su paso meridiano, tiene horario local cero, y el triángulo náutico de posición es infinitamente estrecho. En este caso no se precisan las fórmulas de la trigonometría esférica y los lados del triángulo se pueden calcular por una simple suma o resta.

División del triángulo náutico de posición

Un método alternativo para resolver el triángulo de posición, es dividirlo en dos triángulos esféricos rectángulos, obtenidos construyendo un círculo máximo que pase por GP y que corte al meridiano local perpendicularmente, en X (Fig. 11-2):

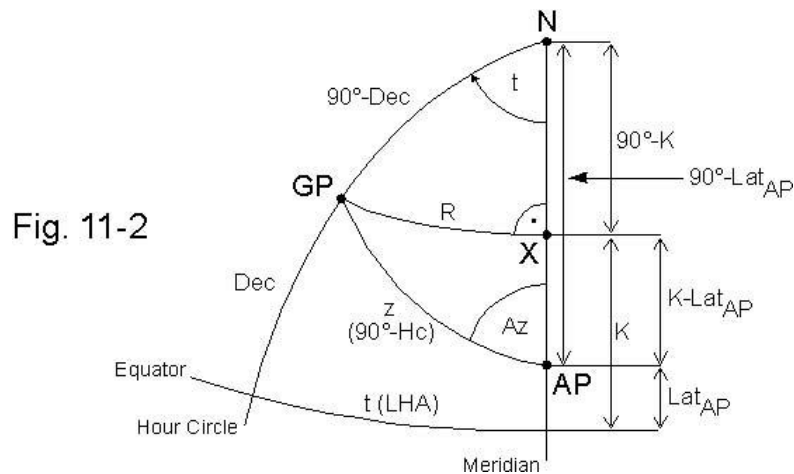


Fig. 11-2

El primer triángulo está formado por GP, N, X, y el segundo por GP, X, AP. Las **partes auxiliares** R y K son cantidades intermedias que se usan para calcular z (o H_c) y Az. K es la distancia angular desde X al ecuador, medida sobre AP. Ambos triángulos se resuelven por las **ecuaciones de Napier para fracciones circulares** (ver capítulo 10). La Fig. 11-3 ilustra los correspondientes diagramas circulares

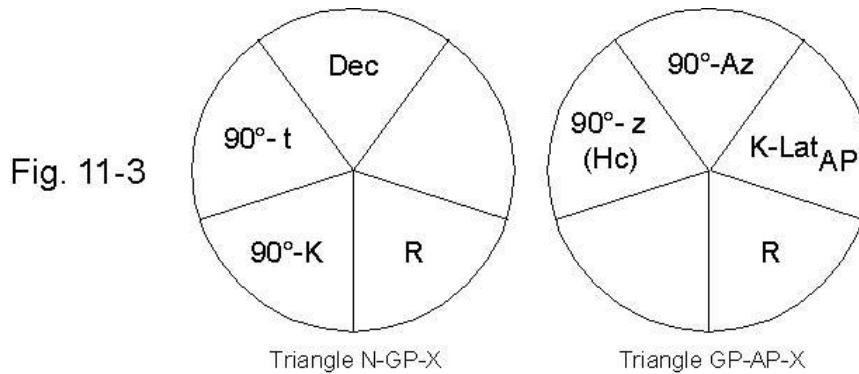


Fig. 11-3

Según las ecuaciones de Napier, H_c y Az se calculan por medio de las fórmulas siguientes:

$$\sin R = \sin t \cdot \cos Dec \quad \Rightarrow \quad R = \arcsin (\sin t \cdot \cos Dec)$$

$$\sin Dec = \cos R \cdot \sin K \quad \Rightarrow \quad \sin K = \frac{\sin Dec}{\cos R} \quad \Rightarrow \quad K = \arcsin \frac{\sin Dec}{\cos R}$$

Sustituyendo K por $(180^\circ - K)$ en la ecuación siguiente si $|t| > 90^\circ$ (o $90^\circ < LHA < 270^\circ$):

$$\sin H_c = \cos R \cdot \cos (K - Lat_{AP}) \quad \Rightarrow \quad H_c = \arcsin [\cos R \cdot \cos (K - Lat_{AP})]$$

$$\sin R = \cos H_c \cdot \sin Az \quad \Rightarrow \quad \sin Az = \frac{\sin R}{\cos H_c} \quad \Rightarrow \quad Az = \arcsin \frac{\sin R}{\cos H_c}$$

En cálculos posteriores hay que sustituir Az por $180^\circ - Az$ si K y Lat tienen signos opuestos o si $|K| < |Lat|$.

Para obtener el acimut circular Az_N ($0^\circ \dots 360^\circ$) se han de aplicar las reglas siguientes:

$$Az_N \begin{cases} - Az & \text{si } Lat_{AP} > 0 \text{ (N)} & \text{y} & t < 0 \text{ (} 180^\circ < LHA < 360^\circ \text{)} \\ 360^\circ - Az & \text{si } Lat_{AP} > 0 \text{ (N)} & \text{y} & t > 0 \text{ (} 0^\circ < LHA < 180^\circ \text{)} \\ 180^\circ + Az & \text{si } Lat_{AP} < 0 \text{ (S)} & & \end{cases}$$

La división del triángulo náutico de posición tiene una importancia considerable porque es la base teórica de numerosas **tablas de situación observada**. P. ej., las tablas Ageton (véase más abajo). También se aplican en la navegación astronómica.

Usando las funciones secante y cosecante ($\sec x = 1/\cos x$, $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$), las ecuaciones de la división del triángulo náutico de posición se pueden escribir como:

$$\operatorname{cosec} R = \operatorname{cosec} t \cdot \sec Dec$$

$$\operatorname{cosec} K = \frac{\operatorname{cosec} Dec}{\sec R}$$

Hay que sustituir K por $(180^\circ - K)$ en la ecuación siguiente si $|t| > 90^\circ$.

$$\operatorname{cosec} H_c = \sec R \cdot \sec (K - Lat)$$

$$\operatorname{cosec} Az = \frac{\operatorname{cosec} R}{\sec H_c}$$

Hay que sustituir Az por $180^\circ - Az$ si K y Lat tienen signo opuesto o si $|K| < |Lat|$.

En forma logarítmica, estas ecuaciones se escriben como:

$$\log \operatorname{cosec} R = \log \operatorname{cosec} t + \log \sec Dec$$

$$\log \operatorname{cosec} K = \operatorname{cosec} Dec - \log \sec R$$

$$\log \operatorname{cosec} H_c = \log \sec R + \log \sec (K - Lat)$$

$$\log \operatorname{cosec} Az = \log \operatorname{cosec} R - \sec H_c$$

Si tenemos unas tablas de logaritmos de secantes y cosecantes, podemos encontrar una situación mediante una serie de sumas y restas (convirtiendo los ángulos en los correspondientes logaritmos de sus secantes y cosecantes y viceversa). Además de la tabla sólo se requiere una hoja de papel y un lápiz.

Las tablas de Ageton (H.O.211) que fueron publicadas por primera vez en 1931 se basan en las fórmulas de arriba y dan una disposición muy eficaz de los ángulos y los logaritmos de sus secantes y cosecantes en 36 páginas. Como todos los cálculos se basan en valores absolutos, se han de tener en cuenta ciertas reglas incluidas en las instrucciones de uso de las mismas.

Las tablas para hallar situaciones observadas se desarrollaron muchos años antes que las calculadoras electrónicas estuviesen disponibles para simplificar los cálculos necesarios de encontrar una situación. Aún hoy, las tablas náuticas son preferidas por los que no quieren tratar con las fórmulas de la trigonometría esférica. Más aún nos proporcionan un método alternativo si falla la calculadora.

Dos versiones modificadas de las tablas Ageton pueden encontrarse en en la página “<http://www.celnav.de/page3.htm>”.

Fórmulas para Cálculos Náuticos

Las fórmulas siguientes – aunque no son de navegación astronómica – resultan indispensables porque son necesarias al navegante para calcular el rumbo y la distancia entre una posición inicial A y una posición final B o también para calcular la posición final B a partir de la posición inicial A, cuando son conocidos el rumbo y de la distancia navegada hasta B. El rumbo verdadero, C es el ángulo formado por el vector que representa el movimiento de la embarcación con el meridiano del lugar. Se mide desde el norte verdadero en sentido de avance de las agujas del reloj entre 0° y 360°. Conociendo las coordenadas de A, Lat_A y Lon_A así como las coordenadas de B, Lat_B y Lon_B, el navegante puede escoger básicamente entre una navegación a rumbo loxodrómico (método más simple y distancia mayor) y la navegación ortodrómica por círculo máximo (distancia mínima entre dos puntos sobre una esfera). Es perfectamente viable una navegación mixta combinando ambos métodos.

Navegación loxodrómica

Un rumbo lineal, también llamado rumbo loxodrómico es una recta sobre la superficie de la Tierra, que cruza todos los meridianos con un ángulo constante, C. Por lo tanto, el rumbo loxodrómico se representa por una recta sobre una carta náutica con proyección mercatoriana (véase el capítulo 13), la cual hace muy sencilla la representación gráfica de una singladura. Sobre una esfera, el rumbo loxodrómico forma una espiral esférica que se extiende de polo a polo, salvo que precisamente aquel sea coincidente con un meridiano (C = 0° o 180°) o con un paralelo (C = 90° o 270°). Mientras un barco mantenga un rumbo constante, sin abatimiento ni deriva, seguirá invariablemente un rumbo lineal y loxodrómico. El rumbo, C y la distancia navegada, d se calculan como se indica más abajo. Imaginemos primeramente que se navega la distancia infinitesimal “dx” desde el punto de partida, A hacia el punto de destino, B. El rumbo navegado será “C” (Fig 12-1):

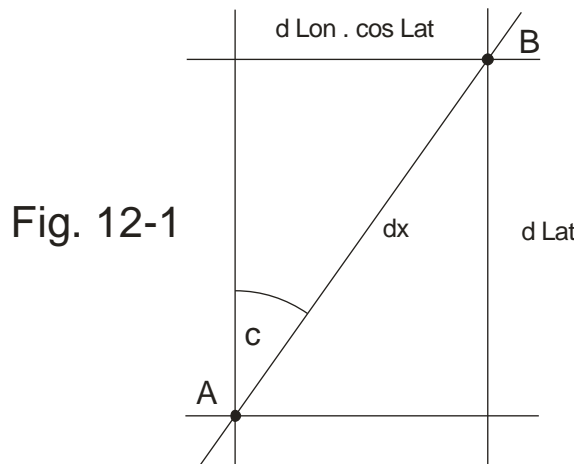


Fig. 12-1

El camino recorrido “dx” puede considerarse como la suma vectorial de una componente norte – sur, dLat, y de una componente este – oeste, dLon · cos Lat. El factor “cos Lat” es la circunferencia relativa del respectivo paralelo de latitud (ecuador = 1)

$$\tan C = \frac{d \text{ Lon } \cos \text{ Lat}}{d \text{ Lat}}$$

$$\frac{d \text{ Lat}}{\cos \text{ Lat}} = \frac{1}{\tan C} \cdot d \text{ Lon}$$

Si la distancia entre A (definido por Lat_A y Lon_B) y B (definido por Lat_B y Lon_B) fuese una cantidad medible, habría que integrar:

$$\int_{Lat_A}^{Lat_B} \frac{d Lat}{\cos Lat} = \frac{1}{\tan C} \int_{Lon_A}^{Lon_B} d Lon$$

$$\ln \left[\tan \left(\frac{Lat_B}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \ln \left[\tan \left(\frac{Lat_A}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{Lon_B - Lon_A}{\tan C}$$

$$\tan C = \frac{Lon_B - Lon_A}{\frac{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{Lat_B}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left(\frac{Lat_A}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right)}{1}}$$

Despejando C y midiendo los ángulos en grados:

$$C = \arctan \frac{Lon_B - Lon_A}{\frac{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{Lat_B^{[^\circ]}}{2} + 45^\circ \right)}{\tan \left(\frac{Lat_A^{[^\circ]}}{2} + 45^\circ \right)} \right)}{1}}$$

$(Lon_B - Lon_A)$ ha de estar entre -180° y $+180^\circ$. Si cae fuera de este intervalo se ha de sumar o restar 360° antes de sustituirlo en la fórmula del rumbo.

La función \arctan da valores entre -90° y $+90^\circ$. Para obtener el rumbo circular C_{RLN} , se han de aplicar las siguientes reglas:

$$C = \begin{cases} C & \text{si } Lat_B > Lat_A \quad \text{y } Lon_B > Lon_A \\ 360^\circ + C & \text{si } Lat_B > Lat_A \quad \text{y } Lon_B < Lon_A \\ 180^\circ + C & \text{si } Lat_B < Lat_A \end{cases}$$

Para hallar la distancia total del camino recorrido, calculamos la distancia infinitesimal dx :

$$dx = \frac{d Lat}{\cos C}$$

La distancia total se obtiene integrando:

$$D = \int_0^D dx = \frac{1}{\cos C} \cdot \int_{Lat_A}^{Lat_B} d Lat = \frac{Lat_B - Lat_A}{\cos C}$$

Finalmente se obtiene:

$$D[km] = \frac{40031.6}{360} (Lon_B - Lon_A) / \cos Lat \qquad D[mn] = 60 \cdot (Lon_B - Lon_A) / \cos Lat$$

Si ambas situaciones tienen la misma latitud, la distancia no se puede calcular por las fórmulas anteriores. En este caso, se han de aplicar las fórmulas siguientes (siendo $C = 90^\circ$ o 270°):

$$D[km] = \frac{40031.6}{360} (Lon_B - Lon_A) \cdot \cos Lat \qquad D[mn] = 60 \cdot (Lon_B - Lon_A) \cdot \cos Lat$$

Navegación Ortodrómica por el Círculo Máximo

La distancia navegada por **círculo máximo** d_{AB} y el rumbo inicial C_A se calculan análogamente a la distancia cenital y al azimut. Para ello se considera el triángulo náutico (véase el capítulo 11) y sustituyendo GP por A, AP por B, z por d_{AB} y LHA por ΔLon_{AB} ($Lon_B - Lon_A$). (Fig 12-2);

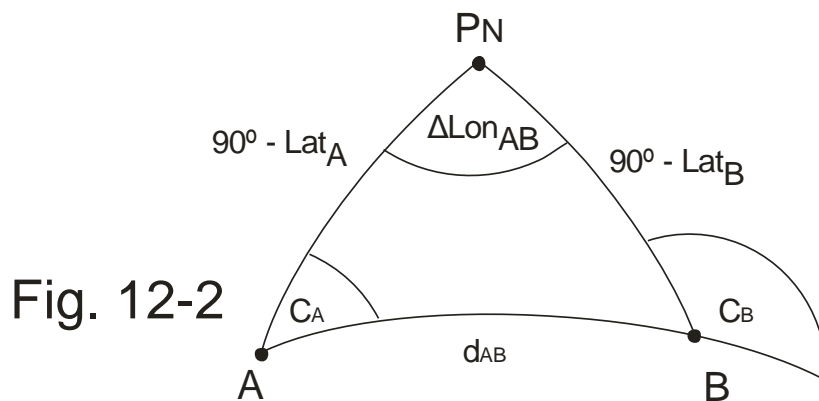


Fig. 12-2

$$d_{AB} = \arccos [\sin Lat_A \cdot \sin Lat_B + \cos Lat_A \cdot \cos Lat_B \cdot \cos (Lon_B - Lon_A)]$$

$$\Delta Lon_{AB} = (Lon_B - Lon_A)$$

Las latitudes norte y longitudes este son positivas, las latitudes sur y longitudes oeste son negativas. La distancia ortodrómica tiene la dimensión de un ángulo. Para poder expresarlo en unidades de longitud, debe multiplicarse la distancia angular obtenida por $40.031,6/360^\circ$ para obtener la distancia ortodrómica expresada en kilómetros o bien por 60 para expresarla en millas náuticas.

$$C_A = \frac{\sin Lat_B - \sin Lat_A \cdot \cos d_{AB}}{\cos Lat_A \cdot \sin d_{AB}}$$

C_A se ha de convertir en $360^\circ - C_A$ si " $\sin (Lon_B - Lon_A)$ " es negativo, para obtener el rumbo verdadero circular ($0^\circ \dots 360^\circ$) en sentido horario desde el norte.

En la Fig 12-2, C_A es el rumbo ortodrómico inicial y C_B el rumbo ortodrómico final de la derrota completa. Debido a que el ángulo entre el círculo máximo recorrido y el meridiano del lugar varía a medida que se prosigue por la derrota ortodrómica (salvo que la derrota coincida con el ecuador o con un meridiano), no podremos mantener invariable el rumbo tal y como se mantendría navegando por la loxodrómica. Teóricamente, debería ajustarse el rumbo continuamente durante la singladura por un círculo máximo. Actualmente se hace posible mediante la navegación computerizada y con los correspondientes pilotos automáticos (posición "track"). Si no se dispone de estos auxiliares instrumentales, se debe calcular periódicamente el nuevo rumbo ortodrómico y corregir a intervalos regulares (véase más abajo).

La navegación ortodrómica requiere una planificación mucho más cuidadosa de la derrota a seguir que una loxodrómica. Sobre una carta con proyección Mercatoriana (véase el Capítulo 13), una derrota por círculo máximo queda representada por una línea curva hacia el Ecuador. En consecuencia el navegante puede precisar más información sobre la derrota seleccionada para verificar si ésta transcurre completamente por aguas realmente navegables.

Con excepción del Ecuador, cada círculo máximo tiene dos **vértices**, los puntos más alejados del Ecuador. Los vértices tienen el mismo valor absoluto que la latitud (con signo opuesto) pero separados en 180° de Longitud. El círculo máximo es tangente a un paralelo de latitud en cada **vertex** (también llamados **ápex**) y C tiene 90° , o bien 270° . Por lo tanto, se tiene un triángulo esférico rectángulo, formado por el Polo Norte, P_N , el **vertex**, V y el punto de partida, A (Fig. 12-3).

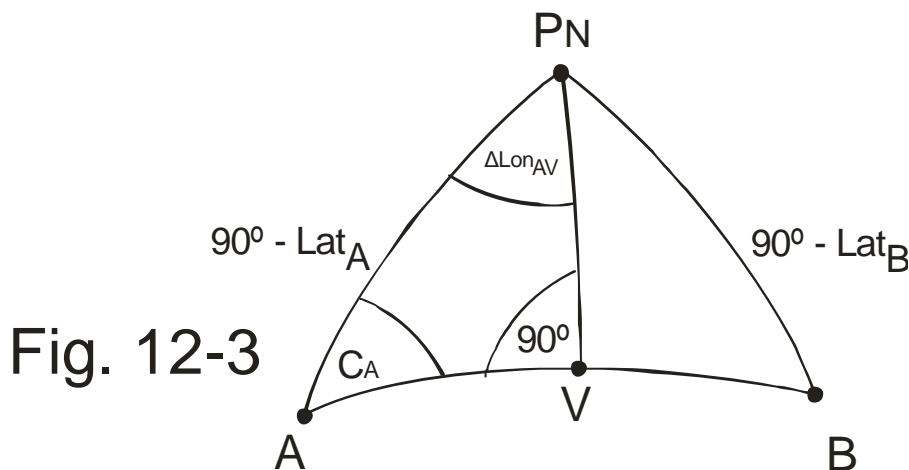


Fig. 12-3

Para derivar las fórmulas necesarias para los cálculos siguientes, se usarán las ecuaciones de *Napier* para fracciones circulares (Fig. 12-4). El ángulo recto está situado en la zona inferior del diagrama circular. Las cinco fracciones circulares se disponen de acuerdo con el sentido de las agujas del reloj.

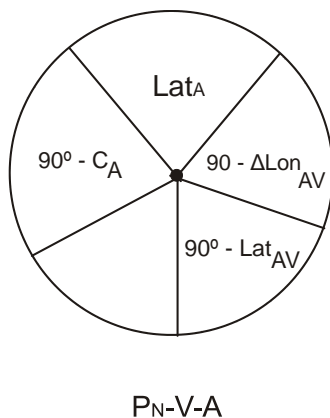


Fig. 12-4

Lo primero que necesitamos, es la latitud del vertex, Lat_V :

$$\cos Lat_V = \sin C_A \cdot \cos Lat_A$$

Resolviendo para Lat_V , se obtiene:

$$Lat_V = \pm \arccos(|\sin C_A| \cdot \cos Lat_A)$$

El valor absoluto de “sin CA” se usa para asegurar que Lat_V no exceda de $\pm 90^\circ$ (la función “arccos” aporta valores entre 90° y 0° para argumentos negativos). La ecuación ofrece dos soluciones de acuerdo con el número de vértices. Sólo resulta relevante el valor obtenido para del vertex que se encuentra delante de la derrota planificada. Se encuentra usando la siguiente fórmula modificada:

$\text{Sgn}(x)$ representa la función del signo de acuerdo con los siguientes convenios:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si “V” esta situado entre “A” y “B” (como se indica en la Fig. 12-3), nuestra latitud pasará por un valor máximo o mínimo en el momento que se alcanza “V”. Esto no ocurre si “B” esta situado entre “A” y “V”.

Conociendo la Lat_V puede calcularse la longitud de “V”. De nuevo se aplican las ecuaciones de Napier:

$$\cos \Delta Lon_{AV} = \frac{\tan Lat_A}{\tan Lat_V} \qquad \Delta Lon_{AV} = \Delta Lon_V - \Delta Lon_A$$

Resolviendo la longitud del vertex, V:

$$Lon_V = Lon_A + \text{sgn}(\sin C_A) \cdot \arccos\left(\frac{\tan Lat_A}{\tan Lat_V}\right)$$

(Sumar o restar 360° al resultado, si fuese necesario).

El término “ $\text{sgn}(\sin C_A)$ ” en la fórmula anterior, aporta una corrección automática para el signo de ΔLon_{AV} .

Si se conoce la posición de “V”, definida por su latitud y su longitud, podrá calcularse la situación de cualquier punto, “X” sobre la derrota del círculo máximo considerado, por simple sustitución de los valores de “X” por los de “A” en el triángulo esférico rectángulo. Mediante las ecuaciones de *Napier* se obtiene:

$$\tan Lat_X = \cos \Delta Lon_{XV} \cdot \tan Lat_V; \quad \Delta Lon_{XV} = Lon_V - Lon_X$$

$$Lat_X = \arctan(\cos \Delta Lon_{XV} \cdot \tan Lat_V)$$

Además, podrá calcularse el rumbo para el punto “X”:

$$\cos C_X = \sin \Delta Lon_{XV} \cdot \sin Lat_V$$

$$C_X = \begin{cases} \arccos (\sin \Delta Lon_{XV} \cdot \sin Lat_V) & \text{si } C_A > 0 \\ 180^\circ + \arccos (\sin \Delta Lon_{XV} \cdot \sin Lat_V) & \text{si } C_A < 0 \end{cases}$$

También puede calcularse el rumbo “C_X” a partir del triángulo esférico oblicuo, formado por los vértices “X”, “P_N” y “B”. Las fórmulas descritas arriba permiten establecer posiciones suficientemente espaciados como “lugares de paso” o “waypoints” sobre la derrota a seguir siguiendo el círculo máximo y combinar los rumbos con derrotas loxodrómicas sobre una carta con proyección de Mercator. Las situaciones así obtenidas permiten representar un rumbo lineal con una gran aproximación a la derrota ortodrómica elegida, estando en condiciones de prever si sobre ella pudieran presentarse obstáculos inadecuados para la navegación.

Latitud Media

Debido a su simplicidad, la fórmula de la **latitud media** se usa con mucha frecuencia en cualquier tipo de navegación. Es una aproximación que da buenos resultados mientras la distancia navegada entre “A” y “B” no sea muy grande y que las posiciones estén suficientemente lejos de los polos.

El Rumbo:

$$C = \arctan \left(\cos Lat_M \cdot \frac{Lon_B - Lon_A}{Lat_B - Lat_A} \right) \quad Lat_M = \frac{Lat_A + Lat_B}{2}$$

El rumbo verdadero se obtiene aplicando las mismas reglas a C que al rumbo loxodrómico (véase más arriba):

La Distancia:

$$d [km] = \frac{40031,6}{360} \cdot \frac{Lat_B - Lat_A}{\cos C} \quad d [mn] = 60 \cdot \frac{Lat_B - Lat_A}{\cos C}$$

Si C = 90° o C = 270° se aplican las fórmulas siguientes:

$$d [km] = \frac{40031,6}{360} (Lon_B - Lon_A) \cdot \cos Lat \quad d [mn] = 60 \cdot (Lon_B - Lon_A) \cdot \cos Lat$$

La Situación Estimada

Es el término náutico para extrapolar nuestra nueva situación B (**situación estimada, DRP**) a partir de una situación anterior A, del rumbo C y de la distancia d (calculada a partir de la velocidad media y del tiempo empleado). Ya que la estima sólo proporciona una situación aproximada (debido a la influencia de la deriva, el abatimiento, etc.), el método de la latitud media da una precisión suficiente. En tierra, la estima es más difícil que en la mar, ya que, en general no es posible seguir un rumbo constante (a no ser en áreas extensas y completamente planas, p. ej, en lagos salados). En la mar se necesita la DRP para escoger una AP cercana y aplicar el método de los determinantes. Si no son posibles las observaciones astronómicas y no disponemos de ayudas electrónicas a la navegación, la estima puede ser la única vía para conocer nuestra situación.

Cálculo de la Nueva Latitud

$$LatB[^\circ] = LatA[^\circ] + \frac{360}{40031.6} \cdot d[km] \cdot \cos C \qquad LatB[^\circ] = LatA[^\circ] + \frac{d[mn]}{60} \cdot \cos C$$

Cálculo de la Nueva Longitud

$$LonB[^\circ] = LonA[^\circ] + \frac{360}{40031.6} \cdot d[km] \cdot \frac{\sin C}{\cos Lat_M} \qquad LonB[^\circ] = LonA[^\circ] + \frac{d[mn]}{60} \cdot \frac{\sin C}{\cos Lat_M}$$

Si la longitud resultante excede de $+180^\circ$ hay que restarla de 360° . Si excede de -180° hay que añadir 360° .

Si el movimiento es la resultante de diferentes componentes (incluyendo la deriva, el abatimiento, etc.), deben sustituirse los términos “ $d \cdot \cos C$ ” y “ $d \cdot \sin C$ ” por

$$\sum d_i \cdot \cos C_i \text{ y también } \sum d_i \cdot \sin C_i, \text{ respectivamente.}$$

Cartas Náuticas y Representación Gráfica de Cartas en Blanco

Una navegación sofisticada es prácticamente imposible sin usar un mapa (en náutica, una carta), proyección de un trozo de la superficie de la Tierra en el plano de un papel. Existen diversos tipos de proyecciones pero la **proyección Mercatoriana** así llamada por el cartógrafo germano-flamenco Gerhard Krämer (en latín Gerardus Mercator), es la más usada en navegación porque proporciona cartas con una cuadrícula ortogonal que es la más conveniente para medir direcciones y dibujar líneas de posición. Además los rumbos aparecen como líneas rectas en las cartas Mercatorianas. Los círculos máximos no son líneas rectas, excepto los meridianos y el ecuador, que también son rumbos.

Para construir una carta Mercatoriana, hemos de recordar cómo se ve la cuadrícula en el globo. En el ecuador un área de p. ej., 5 x 5 grados es casi un cuadrado, pero se convierte en un trapecoide más y más estrecho cuando nos desplazamos hacia uno de los polos. Mientras que la distancia entre dos paralelos de latitud adyacentes es constante, la distancia entre dos meridianos dados se hace progresivamente más pequeña a medida que la latitud aumenta. Un área de dimensiones infinitesimales dLat, dLon aparecerá como un rectángulo de dimensiones dx, dy en el globo (Fig. 13-1)

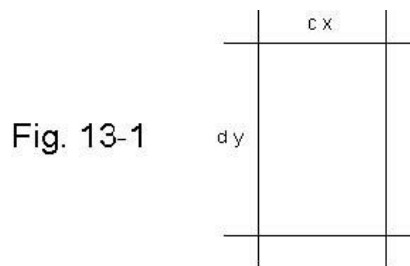


Fig. 13-1

$$dx = c' \cdot dLon \cdot \cos Lat$$

$$dy = c' \cdot d Lat$$

dx contiene el factor cos Lat ya que la circunferencia de un paralelo de latitud está en proporción directa con cos Lat. La constante c' es la escala del globo (medida p. ej. en mm / °).

Como necesitamos que **cualquier** rumbo aparezca como una línea **recta** que corte a todos los meridianos bajo un ángulo constante, estos han de ser líneas rectas verticales equiespaciadas en nuestra carta y un rectángulo infinitesimal definido por dLat, dLon ha de tener una razón constante independientemente de su posición en la carta (dy/dx = const.).

Por tanto si transferimos el rectángulo definido por dLat, dLon del globo a la carta, tendremos:

$$dx = c \cdot d Lon$$

$$dy = c \frac{dLat}{\cos Lat}$$

La nueva constante c es la escala de la carta. Ahora dx es constante (con los meridianos paralelos) pero dy es función de la latitud en la que tengamos situado nuestro rectángulo. Para obtener la menor distancia entre un ppunto de latitud Lat_p y el ecuador, integramos:

$$Y = \int_0^Y dy = \int_0^{Lat_p} \frac{dLat}{\cos Lat} = c \cdot \ln \tan \left(\frac{Lat_p}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Y es la distancia del paralelo respectivo al ecuador. En la ecuación anterior, los ángulos se dan en medidas angulares (radianes). Si medimos los ángulos en grados, la ecuación anterior se convierte en:

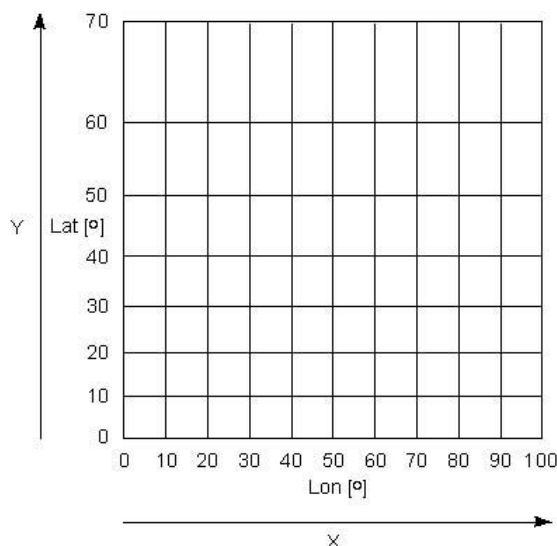
$$Y = c \cdot \ln \tan \left(\frac{Lat_p [^\circ]}{2} + 45^\circ \right)$$

La distancia de cualquier punto al meridiano de Greenwich (Lon = 0) varía proporcionalmente con la longitud del punto Lon_p. Siendo X la distancia del respectivo meridiano al meridiano de Greenwich.

$$X = \int_0^{Lon_p} dx = c \cdot Lon_p$$

La Fig.13-2 muestra un ejemplo de la cuadrícula resultante (espaciada de 10° en 10°). Mientras que los meridianos aparecen igualmente espaciados como líneas verticales, los paralelos de latitud son líneas horizontales que se separan a medida que la latitud aumenta. Y tiende a infinito cuando la latitud es 90°.

Fig. 13-2



Las cartas Mercatorianas tienen la desventaja que la distorsión geométrica aumenta a medida que crece la distancia al ecuador. La proyección Mercatoriana no es adecuada para regiones polares. Un círculo de alturas iguales, por ejemplo, se parece a una elipse distorsionada a altas latitudes. Las superficies cerca de los polos, p. ej., Groenlandia parece mucho más grande en la carta que en el globo.

Se dice a menudo que la proyección Mercatoriana se obtiene proyectando cada punto de la superficie de la esfera, mediante rectas que pasan por el centro de la esfera, en un cilindro hueco tangente a la esfera en el ecuador. Esto es sólo una tosca aproximación, Y sería proporcional a la tan Lat y el aspecto de la razón del pequeño rectángulo dLat, dLon, variaría dependiendo de su posición en la carta.

Gráficas de Cartas náuticas en blanco

Si ampliamos una parte pequeña de la carta Mercatoriana, p. ej., una superficie de 30' de latitud x 40' de longitud, advertiremos que el espaciado entre paralelos de latitud parece ahora casi constante. Una aproximación a la cuadrícula Mercatoriana de una superficie tal se puede construir dibujando líneas equiespaciadas horizontales, representando los paralelos y líneas equiespaciadas verticales representando los meridianos.

El espaciado de los paralelos Δy define la escala de la carta p. ej. 5 mm / mn. El espaciado entre meridianos, Δx es función de la latitud media Lat_M que es la latitud representada por la línea horizontal trazada por el centro del papel.

$$\Delta x = \Delta y \cdot \cos Lat_M$$

$$Lat_M = (Lat_{min} + Lat_{max}) / 2$$

Una representación de una cuadrícula Mercatoriana así simplificada se llama “plantilla de representación gráfica o carta en blanco” y es una herramienta muy útil para dibujar líneas de posición (*Fig. 13-3*).

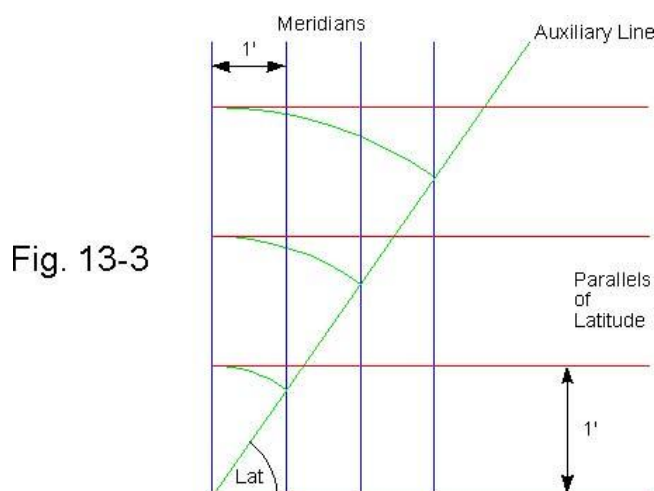


Fig. 13-3

Si no se dispone de calculadora ni de tablas trigonométricas, los meridianos se pueden construir con el siguiente método gráfico.

Se toma un trozo de papel en blanco, y se dibujan el número requerido de líneas equiespaciadas horizontales (paralelos). Se recomienda un espaciado de entre 3 y 10 mm por milla náutica para la mayoría de aplicaciones.

Se dibuja una línea auxiliar que corte a los paralelos con un ángulo numéricamente igual a la latitud media. A continuación, marcamos la escala (definida por el espaciado entre paralelos, p. ej., 5 mm/mn) repetitivamente sobre esta línea, y se dibujan los meridianos por los puntos así señalados (*Fig. 13-3*). Se ha de usar el compás para transferir la escala del mapa a la línea auxiliar.

Las plantillas gráficas para representaciones de cartas en blanco pueden encontrarse en cualquier librería náutica. Graph Paper Printer (Graphpap) es un programa (shareware) muy útil para imprimir múltiples gráficas sobre papel, incluyendo las adecuadas para pequeñas distancias de una latitud dada entre 0° y 80° . Pueden descargarse plantillas en Internet; por ej. desde

<http://pharm.kuleuven.be/pharbio/gpaper.htm>.

Cartas náuticas gnomónicas

La proyección gnomónica se aplica a la navegación ortodrómica porque ofrece la ventaja que todos los círculos máximos aparecen como líneas rectas. En consecuencia, las derrotas navegadas se representan como curvas. Las cartas gnomónicas se obtienen por proyección de los puntos de la superficie terrestre sobre un plano tangente a la superficie mediante una línea que parte del centro de la Tierra. Por lo tanto, la distancia de un punto proyectado desde el punto de tangencia varía en función de la tangente de la distancia angular del punto original al punto de tangencia. Una carta gnomónica cubre menos de un hemisferio y la distorsión gráfica aumenta muy rápidamente con el aumento de la distancia desde el punto de tangencia.. En contraste con la proyección mercatoriana la proyección gnomónica no preserva los ángulos.

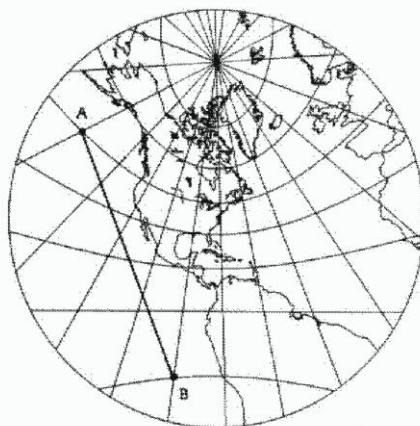
Existen tres tipos de proyección gnomónica:

Si el plano de proyección es tangente a la Tierra en alguno de los Polos (**carta gnomónica Polar**), los meridianos se representan como líneas rectas radiales desde el polo correspondiente. Los paralelos de latitud quedan representados como círculos concéntricos. El espaciado entre latitudes aumenta más rápidamente que las correspondientes distancias polares.

Si el punto de tangencia está sobre el Ecuador (**carta gnomónica ecuatorial**), los meridianos quedan representados como líneas rectas paralelas entre sí. Su espaciado aumenta más rápidamente que su distancia desde el punto de tangencia. El Ecuador queda representado por una línea recta perpendicular a los meridianos. Todos los demás paralelos de latitud (círculos menores) son líneas curvadas hacia sus polos respectivos. Su curvatura aumenta con el incremento de latitud.

En todos los demás casos (**cartas gnomónicas oblicuas**), los meridianos se representan como líneas convergentes hacia el polo elevado. El Ecuador aparece como una línea recta perpendicular al meridiano central (aquel meridiano que pasa por el punto de tangencia). Los paralelos de latitud son líneas curvas hacia los polos. La *Fig 13-4* muestra un ejemplo de una carta gnomónica oblicua.

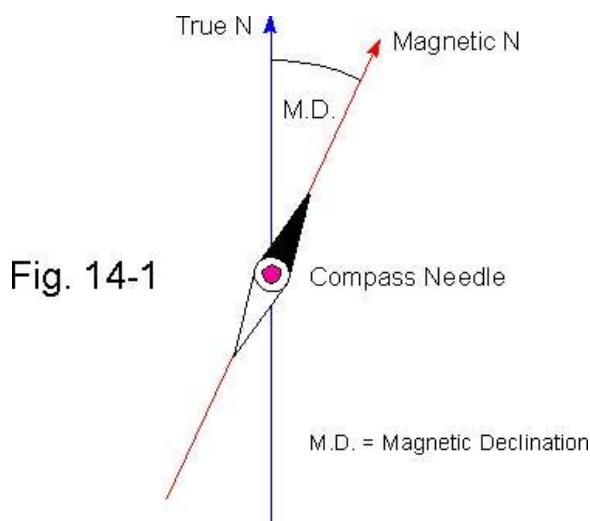
Fig. 13-4



Una carta gnomónica es una representación gráfica muy útil para derrota muy largas. El círculo máximo a recorrer se representa sobre la carta como una línea recta desde "A" hasta "B". Así se aprecian enseguida posibles obstáculos sobre la derrota. Las coordenadas de los Puntos de Paso (preferiblemente aquellos seleccionados sobre líneas meridianas) se leen de las retículas y se pueden trasladar a una carta conveniente con proyección mercatoriana, donde estas posiciones pueden conectarse entre sí mediante trazados de rumbos lineales.

La Declinación Magnética

Debido a que los polos magnéticos de la esfera terrestre no coinciden con los polos geográficos y también a causa de otras irregularidades del campo magnético de la Tierra, la aguja de un compás magnético se alinea con la componente horizontal de las líneas de fuerza del campo magnético y habitualmente no apunta exactamente al polo norte geográfico. El ángulo entre la dirección que marca la aguja del compás y el meridiano geográfico local (Norte verdadero) se llama **declinación magnética** o también, en el lenguaje mariner, **la variación local**. (Fig. 14-1).



La declinación magnética depende de la posición geográfica del observador y puede llegar a exceder más de 30° según en qué zonas. En consecuencia, es muy importante conocer la variación magnética local con el fin de evitar peligrosos errores de navegación. Habitualmente se indica la declinación magnética de la zona en la leyenda de las cartas topográficas locales; esta información puede ser obsoleta porque la variación local sufre suaves y continuados cambios con el tiempo (algunos grados de ángulo por cada diez años). Además, en algunos lugares la declinación magnética puede diferir de la comunicación oficial por causas anómalas de la situación en el campo magnético, causadas por depósitos de material ferromagnético, etc.

Las ecuaciones para el cálculo del azimut descritas en el capítulo 4 aportan una potente herramienta para determinar la declinación magnética en una posición dada. Si el observador no conociera su posición exacta, una situación estimada será suficiente en la mayoría de los casos. No se necesita un sextante para este procedimiento tan simple:

1. Seleccionamos un astro situado bajo en el firmamento o sobre el horizonte visible, preferiblemente el sol o la luna. Medimos su azimut de aguja, "B" con el compás sobre el centro del astro y anotamos la hora del momento de la lectura. Debe evitarse el efectuar estas observaciones cerca de cables de corriente, coches, objetos de acero, imanes, etc. Estos objetos perturban los campos magnéticos locales.
2. Consultaremos la hora del astro en Greenwich (GHA) y su declinación en el Almanaque Náutico o bien se procesan desde un almanaque electrónico.

3. Se calcula el ángulo en el polo, “t” o bien el horario local del astro (LHA) a partir del GHA y de la longitud (véase el capítulo 4).
4. Ahora se calcula el azimut verdadero, Z_v del astro en función de la latitud, la declinación y del ángulo en el polo. Esta fórmula (Capítulo 4) con su convenio de signos y valores es especialmente adecuada para este fin, debido a que no se precisa una altura observada ni calculada.
5. La declinación magnética, MD, se obtiene por sustracción de A_{z_N} del valor “B” de la demora de aguja:

$$MD = B - A_{z_N}$$

(Deben sumarse 360° si el ángulo así obtenido es menor que 180° y restarse 360° en caso de que sea superior a $+180^\circ$).

La diferencia corresponde a la declinación magnética local, pudiendo comprobar hasta qué punto el compás de bitácora está libre de errores. Una Variación Local hacia el Este (véase la fig. 14-1) es positiva ($0^\circ \dots +180^\circ$), hacia el Oeste, es negativa ($0^\circ \dots -180^\circ$). Si la Variación Local fuese conocida, el método puede servir para calcular el error de la aguja para el rumbo dado, es decir el **Desvío** de la aguja náutica.

Efemérides del Sol

El Sol es probablemente el cuerpo celeste más observado en navegación astronómica. El horario en Greenwich y la declinación del Sol, junto con GHA_{Aries} y E_oT se pueden calcular con los algoritmos que se dan en [8,17]. Las fórmulas son relativamente sencillas y útiles en cálculos náuticos con una calculadora de bolsillo programable (se recomienda con 10 dígitos).

En principio, la variable tiempo T, se ha de calcular a partir del año, mes y día. T, es el tiempo en días y fracciones de día, anterior o posterior a 1 Enero de 2000 a 12:00:00 UT.

$$T = 367 \cdot y - \text{floor} \left(1.75 \cdot \left[y + \text{floor} \left(\frac{m+9}{12} \right) \right] \right) + \text{floor} \left(275 \cdot \frac{m}{9} \right) + d + \frac{UT[h]}{24} - 730531.5$$

Donde “y” es el número del año (4 dígitos); “m” es el número del mes y “d” es el número del día del mes respectivo. UT es el horario del tiempo universal en formato decimal (ejemplo: 12h 30^m 45^s = 12,5125). Para el 17 de Mayo de 1999 a 12:30:45 UT por ejemplo, T = - 228,978646. La ecuación es válida desde el 1 de Marzo de 1900 hasta el 28 de Febrero de 2100.

“Floor (x)” es el mayor entero, menor que x. Por ejemplo, floor (3,8) = 3; floor (-2,2) = - 3. La función “floor” forma parte de muchos lenguajes de programación, p.ej., JavaScript. En general, es idéntica a la función “int” usada por otros lenguajes. No obstante, parece que hay diversas definiciones para la función “int”. Esto se ha de comprobar antes de programar la fórmula anterior.

Anomalía media del Sol*:

$$g [^\circ] = 0.9856003 T - 2.472$$

Longitud media del Sol*:

$$L_M [^\circ] = 0.9856474 T - 79.53938$$

Longitud verdadera del Sol*:

$$L_T [^\circ] = L_M [^\circ] + 10915 \sin g + 0.02 \sin (2 \cdot g)$$

Oblicuidad de la eclíptica:

$$\varepsilon [^\circ] = 23.439 - 4 \cdot T \cdot 10^{-7}$$

Declinación del Sol:

$$Dec [^\circ] = \arcsin (\sin L_T \cdot \sin \varepsilon)$$

Ascensión recta del Sol* (en grados):

$$RA [^\circ] = 2 \cdot \arctan \left(\frac{\cos \varepsilon \cdot \sin L_T}{\cos Dec + \cos L_T} \right)$$

GHA _{Aries} *:

$$GHA [^\circ] = 0,9856474 \cdot T + 15 \cdot UT [h] + 100,46062$$

Ángulo horario en Greenwich del Sol *:

$$GHA [^\circ] = GHA_{Aries} [^\circ] - RA [^\circ]$$

* Estos valores han de estar comprendidas entre 0° y 360°. Si es necesario, hay que sumar o restar 360°, o bien sus múltiplos. Esto se puede conseguir utilizando el algoritmo siguiente, muy útil para calculadoras programables.

$$y = 360 \left[\frac{x}{360} - \text{floor} \left(\frac{x}{360} \right) \right]$$

Ecuación del tiempo

$$GAT [h] = \frac{GHA [^\circ]}{15} + 1,26$$

(Si GAT > 24 h, restar 24 h).

$$E_oT [h] = GAT [h] - UT [h]$$

(Si E_oT > + 0.3 h, restar 24 h. Si E_oT < - 0.3 h sumar 24 h).

Semidiámetro y paralaje horizontal

Debido a la excentricidad de la órbita de la Tierra, el semidiámetro y la paralaje horizontal del Sol varían periódicamente a lo largo del año. El “SD” del Sol varía de forma inversamente proporcional a la distancia “R” entre la Tierra y el Sol.

$$R[AU] = 1.00014 - 0.01671 \cdot \cos g - 0.00014 \cdot \cos (2 \cdot g)$$

(1 AU = 149.6 · 10⁶ km)

$$SD ['] = \frac{16}{R[AU]}$$

La paralaje horizontal media del Sol es aproximadamente 0.15'. La variación periódica de HP es demasiado pequeña para ser significativa en la práctica.

Precisión

El error máximo de GHA y Dec es aproximadamente ± 0.6'. Los resultados se ha cruzado con *Interactive Computer Ephemerids 0.51* (con una precisión aprox. 0.1'). Entre los años 1900 y 2049, el error fue menor que 0.3' en la mayoría de los casos (100 fechas escogidas al azar). E_oT tuvo una precisión aprox. ± 2s. En comparación, el error máximo de GHA y Dec sacados del Almanaque Náutico fue aprox. ± 0.25' (para el Sol) cuando se usaron las tablas de interpolación. El error en SD fue menor que 0.1'

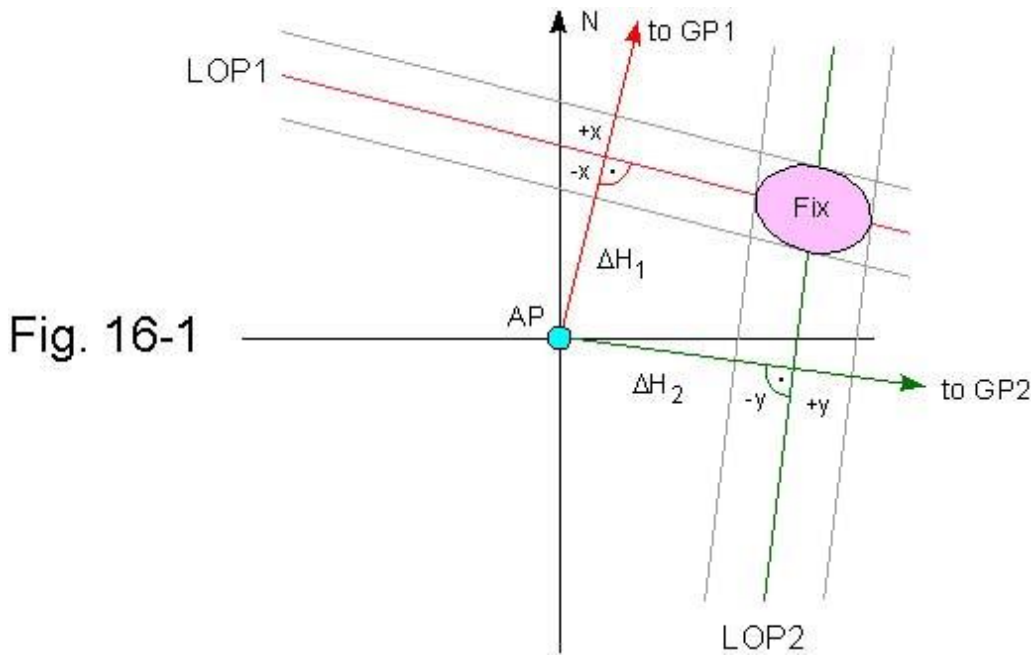
Errores de Cálculo en Navegación

Errores en la Altura

A parte de los errores sistemáticos, que pueden corregirse en gran medida (ver capítulo 2), las alturas observadas siempre contienen errores aleatorios causados por, p. ej., marejadas, refracciones atmosféricas anormales, o la resolución óptica limitada del ojo humano. Aunque un buen sextante tiene una precisión mecánica de $0.1' - 0.3'$, la **desviación estándar** de una altura medida con un sextante marino es aproximadamente de $1'$ en condiciones de uso favorables. La desviación estándar puede aumentar hasta varios minutos de arco debido a diversos factores distorsionadores, o si usamos un sextante con horizonte artificial o de plástico. Las alturas medidas con un teodolito, son considerablemente más precisas ($0.1' - 0.2'$).

Debido a la influencia de los errores aleatorios en las observaciones, las líneas de posición resultan más o menos distinguibles y es mejor considerarlas como **bandas de posición**.

Dos bandas de posición que se cortan definen un **área de posición** (elipse de incertidumbre). La Fig. 16-1 ilustra la forma y el tamaño aproximado de la elipse de incertidumbre para dos LOP dadas. Las desviaciones estándar ($\pm x$ para la primera altura y $\pm y$ para la segunda) se indican con líneas grises.



El área de posición es mínima si el ángulo que forman las bandas es 90° . La situación más probable es en el centro del área dado que la distribución de errores es simétrica. Como las líneas de posición son perpendiculares a los acimuts correspondientes, se han de escoger astros cuyos acimuts difieran aproximadamente 90° para obtener una mayor precisión. No obstante se toleran en la mayoría de los casos, ángulos entre 30° y 150° .

Cuando se observan más de dos astros, sus acimuts habrían de tener una distribución aproximadamente simétrica (**rumbo extendido**). En observaciones a múltiples astros, el ángulo horizontal óptimo entre astros adyacentes, se obtiene dividiendo 360° entre el número de astros observados (120° para 3 astros, 90° para 4 astros, 72° para 5 astros, 60° para 6 astros etc.).

Un rumbo extendido simétricamente no sólo mejora la geometría sino que compensa los errores sistemáticos como p. ej., el error de índice

Es más, hay un rango óptimo de alturas que debe escoger el navegante para obtener resultados de confianza. Las alturas pequeñas incrementan la influencia de refracciones anormales (error aleatorio) mientras que las alturas grandes, que corresponden a círculos de alturas iguales de diámetro pequeño, incrementan los errores geométricos debidos a la curvatura de las LOP. El rango de alturas recomendado en general está entre los 20° y los 70° aunque las excepciones sean admisibles.

Errores en la Hora

Un error en la hora es tan importante como en la altura ya que el navegante, usualmente selecciona en el instrumento una altura dada y mira la hora en la que la imagen de un astro conocido coincide con la línea de referencia del telescopio. La precisión en la medida del tiempo está normalmente en el rango entre una fracción de segundo y varios segundos, dependiendo de la velocidad de cambio de la altura y de otros factores. El error en la hora y en la altura están íntimamente relacionados y pueden convertirse mutuamente uno en otro como se muestra abajo (*Fig. 16-2*).

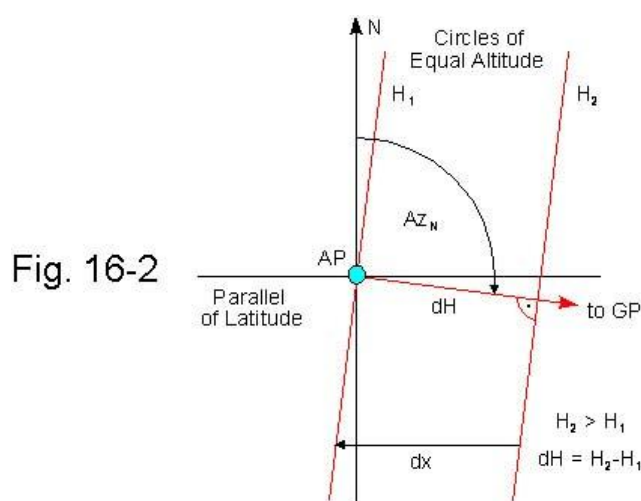


Fig. 16-2

La GP de cualquier cuerpo celeste se desplaza hacia el oeste con una velocidad angular de aproximadamente 0.25' por segundo. Es la velocidad de cambio del LHA del astro observado, debido a la rotación de la Tierra. Lo mismo ocurre con cada círculo de alturas iguales alrededor de GP (mostrados por tangentes en *Fig. 16-2*). La distancia entre dos círculos concéntricos de alturas iguales (de alturas H_1 y H_2) que pasen por AP en el intervalo dt medido a lo largo del paralelo de latitud que pasa por AP es:

$$dx[mn] = 0.25 \cdot \cos Lat_{AP} \cdot dt[s]$$

dx es también el desplazamiento este-oeste de una LOP debida al error en la hora dt . La letra d indica un cambio pequeño (infinitesimal) de una variable (ver literatura matemática) $\cos Lat_{AP}$ es la razón de la circunferencia del paralelo que pasa por AP con la circunferencia del ecuador ($Lat = 0$)

La correspondiente diferencia de alturas (la distancia radial entre ambos círculos de alturas iguales) es:

$$dH ['] = \sin Az_N \cdot dx [mn]$$

Así, la velocidad de cambio en la altura es:

$$dH ['] / dt[s] = 0,25 \cdot \sin Az_N \cdot \cos Lat_{AP}$$

dH/dt es máxima cuando el observador está en el ecuador y decrece hasta cero a medida que se acerca hacia uno de los polos. Además dH/dt es máximo si GP está exactamente al este de AP (dH/dt positiva) o exactamente al oeste de AP (dH/dt negativa). dH/dt es cero si el acimut es 0° o 180° . Ello es debido a que la altura del astro observado pasa por un mínimo o un máximo en el instante de su paso meridiano ($dH/dt = 0$).

El máximo o mínimo de altura, ocurre en el paso meridiano solamente si la declinación del astro es constante. De otra forma la altura máxima o mínima se observan poco antes o poco después del paso meridiano (ver capítulo 6). El fenómeno es particularmente obvio si se observa la Luna cuya declinación varía muy rápidamente

Un **error de cronómetro** es un error sistemático de la hora. Tiene influencia en cada línea de posición de modo que sólo queda afectada la longitud de la situación, pero no la latitud, supuesto que la declinación no cambia significativamente (Luna!). Un cronómetro que vaya adelantado 1^s , por ejemplo, desplaza la situación $0,25'$ hacia el oeste y un cronómetro que vaya atrasado 1^s , desplaza la situación la misma cantidad hacia el este. Si conocemos nuestra posición, podemos hallar el error del cronómetro por la diferencia entre nuestra longitud verdadera y la obtenida en el momento de la observación. Si no conocemos nuestra longitud, el error del cronómetro puede hallarse por observaciones a la Luna (capítulo 7).

Ambigüedad

Una geometría deficiente no solo puede reducir la precisión sino que incluso puede dar una situación totalmente errónea. Si el ángulo horizontal observado (diferencia de acimuts) entre dos astros se acerca a 180° , la distancia entre los puntos de intersección de los círculos de alturas iguales correspondientes se hace muy pequeña (a 180° exactamente, los círculos son tangentes). Los círculos de alturas iguales de diámetros pequeños, resultantes de alturas grandes, también contribuyen a tener distancias pequeñas. Las distancias pequeñas entre ambos puntos de intersección, no obstante, incrementa el riesgo de ambigüedad (Fig. 16-3)

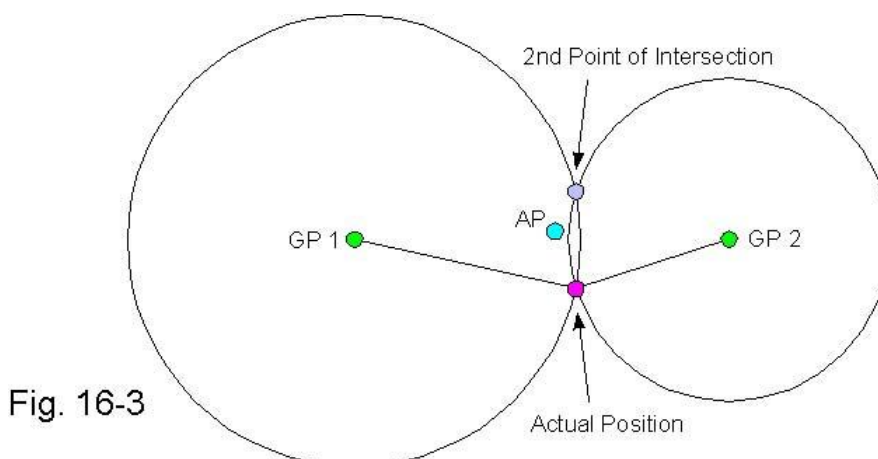


Fig. 16-3

En los casos en que - debido a que el ángulo horizontal es próximo a 180° y/o se toman alturas muy grandes - la distancia entre ambos puntos de intersección es demasiado pequeña, no podemos asegurar que la situación estimada esté siempre suficientemente cerca de la situación verdadera.

Si AP está cerca de la situación verdadera, la situación observada trazando las LOP (tangentes) será casi idéntica a la situación verdadera. La precisión en la situación observada decrece a medida que la distancia entre AP y la situación verdadera aumenta. La distancia entre la situación observada y la verdadera se hace cada vez mayor a medida que AP se acerca a la línea que une GP₁ y GP₂ (dibujad los acimuts y tangentes mentalmente). En el peor de los casos puede haber un error en la situación de ¡cientos o incluso de miles de millas náuticas!

Si AP está exactamente en la línea que une GP₁ y GP₂ p. ej., es equidistante de la situación verdadera y del segundo punto de intersección, el ángulo horizontal entre GP₁ y GP₂, visto desde AP será 180° . En este caso las dos LOP son paralelas y no se puede hallar situación observada alguna.

Cuando AP se acerca al segundo punto de intersección, se obtiene una situación observada más o menos cercana a dicho punto. Como la situación verdadera y el segundo punto de intersección son simétricos respecto a la línea que une GP_1 y GP_2 , el método del intercepto no puede detectar cual de las dos situaciones teóricamente posibles es la verdadera.

La aplicación del método del intercepto de forma iterativa, sólo puede mejorar la situación observada si la AP inicial está más cerca de la situación verdadera que del segundo punto de intersección. De otra forma se obtiene una situación “mejorada” errónea.

Cada situación náutica se ha de evaluar críticamente antes de decidir si se puede obtener o no una situación observada. La distancia entre AP y la situación verdadera del observador ha de ser considerablemente menor que la distancia entre la situación verdadera y el segundo punto de intersección. Este es el caso usual si se han tenido en cuenta las recomendaciones anteriores en cuanto a l altura, ángulo horizontal y distancia ente AP y la situación verdadera.

Un método simple para mejorar la fiabilidad de la situación observada.

Toda altura medida con un sextante, teodolito, o cualquier otro aparato contiene errores sistemáticos y accidentales que repercuten en el resultado final (situación observada). Los errores sistemáticos se eliminan más o menos cuando se calibra cuidadosamente el instrumento utilizado. La influencia de los errores accidentales decrece si se hacen suficientes observaciones, supuesto que **la distribución de error** es simétrica. En la práctica, el número de observaciones es limitado y la distribución de error es más o menos asimétrica, sobre todo si hay un valor espúreo, una medida con un error anormalmente grande. Entonces el resultado medio puede diferir significativamente del verdadero valor. Al dibujar más de dos líneas de posición el navegante experto es capaz de identificar los valores espúreos por la forma del polígono de error y despreciar las LOP asociadas. El método de los mínimos cuadrados, sin embargo, al dar un valor promedio, no reconoce los valores espúreos y puede dar resultados erróneos.

El método simple siguiente aprovecha el hecho que la **mediana** de un número de medidas está mucho menos afectada por los valores espúreos que el **valor medio**.

1. Escogemos un cuerpo celeste y medimos una serie de alturas. Calculamos el acimut y el determinante de cada observación de dicho cuerpo. El número de medidas de la serie ha de ser impar (3,5,7,...). La fiabilidad del método aumenta con el número de observaciones.
2. Ordenamos los **determinantes** calculados por orden de magnitud y escogemos la **mediana** (el valor central de la serie de determinantes obtenidos) y su acimut asociado. Descartamos cualquier otra observación de la serie.
3. Repetimos el procedimiento anterior al menos con otro astro (o con el mismo astro cuando su acimut haya cambiado suficiente).
4. Dibujamos las líneas de posición usando los acimuts y determinantes seleccionados de cada serie, o usamos los datos escogidos para calcular la situación observada por el método de los mínimos cuadrados (capítulo 4).

Este método se ha probado con excelentes resultados en tierra. En la mar, dónde la posición del observador cambia continuamente, el método se ha de modificar avanzando AP de acuerdo con el camino recorrido entre las observaciones de cada serie.

Anexo:

Bibliografía :

- [1] Bowditch, The American Practical Navigator, Pub. No. 9, Defense Mapping Agency Hydrographic/Topographic Center, Bethesda, MD, USA
- [2] Jean Meeus, Astronomical Algorithms, Willmann-Bell, Inc., Richmond, VA, USA 1991
- [3] Bruce A. Bauer, The Sextant Handbook, International Marine, P.O. Box 220, Camden, ME 04843, USA
- [4] Charles H. Cotter, A History of Nautical Astronomy, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York York, NY, USA (This excellent book is out of print. Used examples may be available at www.amazon.com)
- [5] Charles H. Brown, Nicholl's Concise Guide to the Navigation Examinations, Vol.II, Brown, Son & Ferguson, Ltd., Glasgow, G41 2SG, UK
- [6] Helmut Knopp, Astronomische Navigation, Verlag Busse + Seewald GmbH, Herford, Germany (German)
- [7] Willi Kahl, Navigation für Expeditionen, Touren, Törns und Reisen, Schettler Travel Publikationen, Hattorf, Germany (German)
- [8] Karl-Richard Albrand and Walter Stein, Nautische Tafeln und Formeln (German), DSV-Verlag, Germany
- [9] William M. Smart, Textbook on Spherical Astronomy, 6th Edition, Cambridge University Press, 1977
- [10] P. K. Seidelman (Editor), Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, University Science Books, Sausalito, CA 94965, USA
- [11] Allan E. Bayless, Compact Sight Reduction Table (modified H. O. 211, Ageton's Table), 2nd Edition, Cornell Maritime Press, Centreville, MD 21617, USA
- [12] The Nautical Almanac (contains not only ephemeral data but also formulas and tables for sight reduction), US Government Printing Office, Washington, DC 20402, USA
- [13] Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln (German), Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie, Germany
- [14] The Lunar Distance Page, <http://www.lunardistance.com>
- [15] IERS Rapid Service, <http://maia.usno.navy.mil>
- [16] Hannu Karttunen et al., Fundamental Astronomy, 4th Ed., Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 200
- [17] The Astronomical Almanac for the Year 2002, US Government Printing Office, Washington, DC 20402, USA
- [18] Michel Vanvaerenberg & Peter Ifland, Line of Position Navigation, Unlimited Publishing, Bloomingdale, Ind, 2003
- [19] George H. Kaplan, the Motion of the Observer in Celestial Navigation, Astronomical Applications Department U.S. Naval Observatory, Washington DC
- [20] Ed William´s Aviation Formulary, <http://williams.best.vwh.net/avform.htm>

Páginas Web:

Principal del autor: <http://www.celnav.de>

Por los traductores: wstockfleth@yahoo.es; lcoll2@gmail.com.